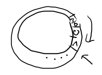
Vorlesung 6

Katarina Bellová
katarina.bellova@uni-due.de
(Moodle) BC 515

Bsp: Roulette:



$\omega \in \Omega = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$

X: „Setze 1(€) auf 17":

$$\begin{cases} X(17) = 36 - 1 = 35 \quad (€) \\ X(\omega) = -1 \ (€), \quad \omega \neq 17 \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{j=0}^{36} P(X=j) \cdot X(j) = P(X=17) \cdot 35 + P(X \neq 17) \cdot (-1)$$
$$= \frac{1}{37} \cdot 35 \ (€) + 36 \cdot \frac{1}{37} \cdot (-1) \ €$$
$$= \frac{1}{37}(35 - 36) \ (€) = -\frac{1}{37} \ (€)$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 \ (€), & \text{falls } \omega \text{ gerade}, \ \omega \neq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

versuchen: $x = 35$, $y = 1$:

$$(X = x) \cap (Y = y) = \underbrace{(X = 35)}_{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 35\}} \cap (Y = 1) = \{17\} \cap \{2, 4, 6, \dots, 36\} = \emptyset$$

$P((X=x) \cap (Y=y)) = P(\emptyset) = 0$, aber $P((X=x)) = P(X=35) = P(\{17\}) = \frac{1}{37}$

$P((Y=y)) = \frac{18}{37}$

$$\Rightarrow P((X=35) \cap (Y=1)) \neq P(X=35) \cdot P(Y=1)$$
$$0 \neq \frac{1}{37} \cdot \frac{18}{37}$$

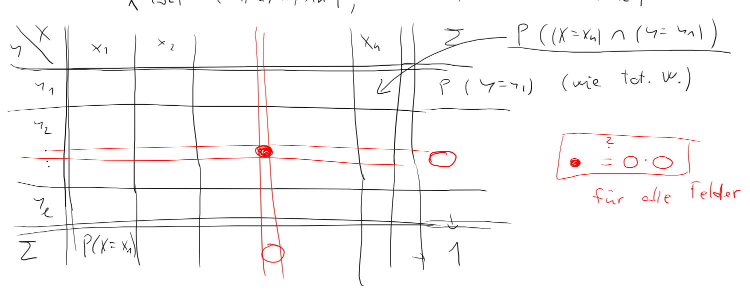
Im allgemeinen:

Y \ X	35	-1	Σ
1	$P((X=35) \cap (Y=1)) = 0$	$\frac{18}{37}$	$\frac{18}{37}$
-1	$\frac{1}{37}$	$\frac{17+1}{37}$	$\frac{19}{37}$
Σ	$\frac{1}{37} = P(X=35)$	$\frac{36}{37} = P(X=-1)$	1

$\frac{18}{37} = P((Y=1)) = P((Y=1) \cap (X=35)) + P((Y=1) \cap (X=-1))$

$\frac{19}{37} = P(Y=-1) = P((Y=-1) \cap (X=35)) + P((Y=-1) \cap (X=-1))$

Allgemein: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}$



Bew. von 2.12 (iii):

$$E(X) \cdot E(Y) = \left(\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \cdot P(X = x_i)\right) \cdot \left(\sum_{j \in Y(\Omega)} y_j \cdot P(Y = y_j)\right) =$$
$$= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \left(x \cdot P(X=x) \cdot y \cdot P(Y=y)\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} x \cdot y \cdot P(X=x) \cdot P(Y=y)$$
$$\overset{\text{unabh.}}{=} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} x \cdot y \ P((X=x) \cap (Y=y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \underbrace{x \cdot y}_{a} \ P((X=x) \cap (Y=y))$$

möglicher Wert von $X \cdot Y$, eventuell mehrmals in der Summe: $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$

$$= \sum_{a \in X \cdot Y(\Omega)} a \cdot \underbrace{\left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ x \cdot y = a}} P((X=x) \cap (Y=y))\right)}_{P(X \cdot Y = a)} = \sum_{a \in X \cdot Y(\Omega)} a \cdot P(X \cdot Y = a)$$
$$= E(X \cdot Y)$$

Bew von 2.16 (iii) für $n = 2$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$
$$= E(X^2 + 2X \cdot Y + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$
$$= E(X^2) + 2E(X \cdot Y) + E(Y^2) - (E(X))^2 - 2 \cdot E(X) \cdot E(Y) - (E(Y))^2$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2\underbrace{(E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y))}_{0 \text{ wenn } X, Y \text{ unab.}}$$
$$= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

$\square$

Bsp: X: Wurf mit 6-er Würfel, X = # Augenzahlen

Y: Wurf mit Münze: $Y = 1$ oder $Y = -1$

$X \cdot Y$ … Würfel gibt Betrag an, Münze: Verlieren / Gewinnen

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{-1, 1\}$ $\qquad |\Omega| = 12$

$$E(X \cdot Y) \overset{?}{=} E(X) \cdot E(Y) = E(X) \cdot \underbrace{\left(1 \cdot \underbrace{P(Y=1)}_{\frac{1}{2}} + (-1) \cdot \underbrace{P(Y=-1)}_{\frac{1}{2}}\right)}_{0} = 0$$

X, Y Unabhängig?

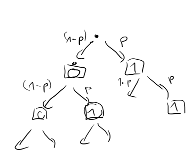
$P((X=x) \cdot P(Y=1)) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = P((X=x)) \cdot P(Y=1)$

$P((X=x) \cdot P(Y=-1)) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = P((X=x)) \cdot P((Y=-1))$ ✓

Frage BV:

$k = 0, 1, \dots, n$:

$\Omega = \{0,1\}^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\}, \ \forall i\}$



Es ist: $P(\{0, 0, \dots, 0\}) = (1-p)^n$

$P(\{1, 0, 0, \dots, 0\}) = p \cdot \underbrace{(1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{n-1}$
$= p \cdot (1-p)^{n-1}$

$P(\{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}) = p \cdot (1-p)^{n-1}$

$\longrightarrow P(\{\omega_1, \dots \omega_n\}) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $\quad k$ = # von 1'er in $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ $\left(= \sum_{i=1}^n \omega_i\right)$

$E_k := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}$ … „k 1'er"

$$P(E_k) = \sum_{\omega \in E_k} P(\omega) = \sum_{\omega \in E_k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = |E_k| \cdot p^k \cdot (1-p)^k$$
$$= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^k$$

$\binom{n}{k}$: wähle k Stellen, wo die 1'er stehen

Zu Def. von Binomialverteilung

tatsächlich eine Verteilung:

$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, $\quad \cdot \ P(X = k) \geq 0$ ✓

$$\cdot \ \sum_{k=0}^n P(X=k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{p^k}_{x} \cdot \underbrace{(1-p)}_{y}{}^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$ ✓

Bsp 1: Ereignisse: $F \hat{=}$ fehlerhaft

Bsp 1: $F \hat{=}$ fehlerhaft $\quad P(F) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = p$

$\overline{F} \hat{=}$ nicht fehlerhaft $\quad P(\overline{F}) = 1 - p = \frac{19}{20}$

$1 \sim F \quad , \quad 0 \sim \overline{F}$

In der Kiste 100 Produkte $\sim$ $n = 100$

Bernoulli – Exp. von Umfang 100

$\rightsquigarrow$ Die W'keit für genau 6 fehlerhafte Produkte in 1 Kiste

$$P(X=6) = \binom{100}{6} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^6 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{100-6} = \underline{\underline{\binom{100}{6} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^6 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{94}}}$$

Bsp 2 Selbe Frage!

oder: $1 \sim \overline{F} \quad , \quad 0 \sim F$

$p = \frac{19}{20}, \quad n = 100$

$$P(Y = 94) = \underline{\binom{100}{94}} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{94} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^{6} =$$

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \underline{\underline{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}}$$

Bsp 3: $P((X \leq 6)) = P((X=0)) + P((X=1)) + P((X=2)) + \ldots + P((X=6))$

$$= \binom{100}{0} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^0 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{100} + \binom{100}{1} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^1 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{99} + \ldots + \binom{100}{6} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^6 \left(\frac{19}{20}\right)^{94}$$