VL 7

Satz 2.18

(a) $B_{n,p}(k) = P(X=k) = \underline{P(\bar{X} = n-k)} = B_{n,1-p}(n-k)$

$X \ldots$ # fehlerhafte Prod. in 1 Kiste (1 Kiste = n Prod.)

$\bar{X} \ldots$ # heilen Produkten in 1 Kiste

$\leadsto \bar{X}$ ist $B(n, 1-p)$ ↳ Wahr., dass Produkt heile

(s. Bsp 1+2)

Formal: $B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot \underbrace{p^k} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}} =$

$B_{n,1-p}(n-k) = \binom{n}{n-k} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot (1-(1-p))^{n-(n-k)}$

$= \binom{n}{n-k} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}} \cdot \underbrace{p^k} = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} \cdot p^k = B_{n,p}(k)$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

(b) mit Formeln (Skript) $P(X \le m) = \sum_{k=0}^{m} P(k=k) = \sum_{k=0}^{m} B_{n,p}(k) = \ldots$

$\boxed{X \le m}$ „höchstens 6 Fehlerh." $\Leftarrow$ $\boxed{X + \bar{X} = n}$ $\underline{\bar{X} \ge n-m}$ „zum. 94 heile" $\overset{\boxed{n,m \in \mathbb{Z}}}{\Leftrightarrow}$ $\boxed{\bar{X} > n-m-1}$

Gegenteil von $\bar{X} \le n-m-1$

$\underline{(\bar{X} > n-m-1)} = \{\omega \in \Omega \mid \bar{X}(\omega) > n-m-1\}$

$(\bar{X} > n-m-1) \,\dot{\cup}\, (\bar{X} \le n-m-1) = \Omega$

↑ disjunkt

$\Rightarrow \underline{P(\bar{X} > n-m-1) + P(\bar{X} \le n-m-1) = 1}$

$\Rightarrow P(X \le m) = P(\bar{X} > n-m-1) = 1 - P(\bar{X} \le n-m-1)$ □

Bsp 4 Im 1 Schritt: 12 W, 18 R Kugeln

1-mal ziehen: $P(\text{rot}) = \frac{18}{30} = p$

50-mal ziehen: Bernoulli mit Umfang $n = 50$, $p = \frac{18}{30}$

$X \ldots$ Anzahl von roten Kugeln bei 50-mal ziehen

$\underline{P(X \le 25)} = \sum_{k=0}^{25} P(X=k) = \sum_{k=0}^{25} \binom{50}{k} \cdot \left(\frac{18}{30}\right)^k \cdot \left(\frac{12}{30}\right)^{50-k}$

$1-p = \frac{12}{30}$

Übergang von $X \le 25$ zu $\bar{X} > \underbrace{(50-25)}$:

„6 ≤ 94"

$X_2 \quad$ Übergang $\quad \bar{X}_2$

$p \rightsquigarrow (1-p)$ (in der Tabelle: $p \le 0{,}5$)

$\to P(X \le 25) = 1 - P(\bar{X} \le 50-25-1) = 1 - \underbrace{P(\bar{X} \le 24)}$

$\cong 1 - 0{,}9427 = 0{,}0573$

Tabelle: $p = \frac{12}{30} = 0{,}4$ $(< 0{,}5)$

rot ≤ 25 ⇔ $\underline{\#\text{ weiß} \ge 25}$ Gegenteil: $\underline{\#\text{ weiß} < 25}$ ⇕ # weiß ≤ 24

Bem: Erstellen der Tabelle / programmieren der (kumulativen) Werte: $P(X \le m) = \sum_{k=0}^{m} P(X=k)$

- keine Fakultäten berechnen!

$B_{n,p}(k) = \underline{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \overset{\ldots}{=} \frac{n-k+1}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)} \cdot \frac{p}{1-p}$

$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p} B_{n,p}(k-1)$

Satz 2.20

$E(X)$: intuitiv ✓

Aus Def: $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \underline{\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$

$\overset{\ldots}{\underset{\text{(skrip)}}{=}} n \cdot p$

Trick: $\underline{X = X_1 + \ldots + X_n}$ $\Rightarrow E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls beim } i\text{-ten Durchgang des Experiments eine } 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann: $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1-p$

$E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) = 1 \cdot p = \underline{p}$

$\mathrm{Var}(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = p - (p)^2 = \underline{p(1-p)}$

$X_i^2 = \begin{cases} 1, & \text{mit } P(X_i^2 = 1) = p \\ 0, & \text{mit } P(X_i^2 = 0) = 1-p \end{cases}$

$X_i^2 = X_i$ (in diesem Fall!)

Tatsächlich, $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ (Anzahl von 1'er)

$\Rightarrow E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = n \cdot p$

- $X_1, \ldots, X_n$ paarweise unabhängig (… auch aus Def.)

$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n) = n \cdot p \cdot (1-p)$

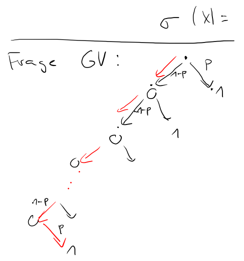
Bsp 4: $n = 100$, $p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

$\Rightarrow E(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{5}{100} = 5$

$\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{100} = 5 \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{4} = 4{,}75$

$\sigma(X) = \sqrt{4{,}72}$

Frage GV:



einmal

k mal

(k+1) mal

$P(k\text{-mal } 0, \text{ zum } (k+1)\text{-mal } 1)$

$= \underbrace{(1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{k} \cdot p$

$= (1-p)^k \cdot p$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$

Bem: GV ist tatsächlich eine Verteilung: $\boxed{1-p \in (0,1)}$

$p \in (0,1)$ $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \cdot p = p \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)}$

geom. Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \overset{|q|<1}{=} \frac{1}{1-q}$ (Mafin 1)

$= p \cdot \frac{1}{1-1+p} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$ ✓

Bem zu Literatur: Andere Def. von GV: $(Y = k) = \{$„$(k-1)$ Nullen, an der k-ten Stelle 1"$\}$

$\Rightarrow Y = X + 1$

Bsp: „Mensch ärgere dich nicht": Wurf mit fairen Würfel. Wann kommt die erste 6?

$\leadsto$ Verteilung $Y = X + 1$, $X \sim G\left(\frac{1}{6}\right)$

$\overset{\shortparallel}{p}$ $\underline{\text{Wahrschein. von einer 6}}$

$E(Y) = E(X) + 1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{6}} - 1\right) + 1 = \underline{6}$

Intuitiv OK, genau

Bew Satz 2.22:

$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \underline{P(X=k)} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^k \cdot p = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \underline{k} \cdot (1-p)^k$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$

Ableiten (Mafin 2): $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' \overset{\text{Mafin 2}}{\underset{|x|<1}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \underline{\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}}$

$\underline{+\frac{1}{(1-x)^2}} = (1-x)^{-2} \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{\text{aus Potenz}} \to (1-x)'$

$$+\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}, \qquad |x| < 1$$

$$E(X) = p\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(1-p)^k = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^k = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot (1-p)$$

$$= p\cdot(1-p)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \overset{\boxed{x = 1-p}}{=} p\cdot(1-p)\cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} =$$

$$= p\cdot(1-p)\cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

Für Var(X): Skript

Idee: $\underline{E(X^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot (1-p)^k \cdot p$

$\sum k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2}$ ... durch 2 Ableitungen von $\sum x^k = \frac{1}{1-x}$

$$\leadsto \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$