Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

Vorlesung 9

Poisson Verteilung

Definition 2.33.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$, wenn für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Wir sagen kurz: X ist $P(\lambda)$-verteilt.

Wird benutzt um die Anzahl von zufälligen Ereignissen an einem Ort, in einem Zeitabschnitt,… zu berechnen. Die Voraussetzung dafür sind:

1. **diese Ereignisse sind unabhängig voneinander**
2. **der Erwartungswert der Anzahl dieser Ereignisse ist proportional zur Größe des Ortes, des Zeitabschnittes, …**
3. λ **ist die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse im Ganzen**

$$E(X) = \lambda \qquad\qquad Var(X) = \lambda$$

Poisson Verteilung

Poisson: $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Beispiel PV1: Bei einer radioaktiven Substanz werden in einer Stunde 1961 Zerfallsakte registriert. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem 10-Sekunden-Intervall (a) genau drei, (b) mehr als drei Zerfallsakte stattfinden.

Zerfallsrate: $\dfrac{1961}{60 \cdot 6} = 5{,}44722... = \lambda$

Entspricht der durchschnittlichen Anzahl von Zerfallsakten in einem 10-Sekunden-Intervall

Zu (a): $\dfrac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0{,}11...$

Zu (b): $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0{,}79...$

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.17.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt binomial-verteilt mit den Parametern n und p, wenn für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: B_{n,p}(k).$$

Wir sagen kurz: X ist $B(n, p)$-verteilt.

Satz 2.20. *Ist X $B(n,p)-$verteilt, so gilt für den Erwartungswert $E(X) = np$ und für die Varianz $Var(X) = np(1-p)$.*

Satz: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\lambda = p_n \cdot n$. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p_n (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-p_n n} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

D.h.: Für großes n und kleines p ist $B_{n,p}(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-pn}$.

Poisson Verteilung

Gesetz der kleinen Zahlen: Ein Laplace-Experiment, mit n möglichen Elementarereignissen, wird genau n-mal hintereinander (unabhängig) durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit für ein festes Elementarereignis, dass es in keinem der Durchgänge auftritt ist

Binomial-Verteilung: Wahrscheinlichkeit, dass ein Elementarereignis eintritt ist $\frac{1}{n}$.

$$\binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \approx e^{-1} \approx \frac{1}{3}.$$

Insbesondere erwarten wir, dass ca. $\frac{1}{3}$ der Elementarereignisse nach n Durchgängen nicht eingetreten sind.

Beispiel: Wir spielen 37-mal Roulette. Dann werden wahrscheinlich etwa $\frac{1}{e}\cdot 37 = 13{,}6...$ Zahlen nicht erscheinen.

Gesetz der großen Zahlen

In einer Bäckerei sollen die Brötchen genau 50g wiegen. Es wird ein Jahr lang jedes Brötchen gewogen. Im Schnitt wiegen die Brötchen tatsächlich 50g, und es gibt eine Standardabweichung von 3g.

Können wir mit diesen Daten die Wahrscheinlichkeit dafür abschätzen, dass ein Brötchen weniger als 5g vom Idealgewicht (50g) abweicht?

Sei X die Zufallsvariable, die jedem Brötchen das Gewicht zuordnet.

Es ist $E(X) = 50$ und $Var(X) = 9$.

Gesucht: $P(|X - E(X)| < 5) = P(|X - 50| < 5)$.

Gesetz der großen Zahlen

Satz 2.37 (Tschebyscheffsche Ungleichung). *Es seien* $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* X *eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Dann gilt für jedes* $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} .$$

In einer Bäckerei sollen die Brötchen genau 50g wiegen. Es wird ein Jahr lang jedes Brötchen gewogen. Im Schnitt wiegen die Brötchen tatsächlich 50g, aber es gibt eine Standardabweichung von 3g.

Können wir mit diesen Daten die Wahrscheinlichkeit dafür abschätzen, dass ein Brötchen weniger als 5g vom Idealgewicht (50g) abweicht?

Sei X die Zufallsvariable, die jedem Brötchen das Gewicht zuordnet.

Es ist $E(X) = 50$ und $Var(X) = 9$.

$$P(|X - E(X)| < 5) = P(|X - 50| < 5) = 1 - P(|X - E(X)| \geq 5)$$

$$\geq 1 - \frac{9}{25} = 0{,}64$$

Gesetz der großen Zahlen

Beispiel: Wir spielen 37-mal Roulette. Dann werden wahrscheinlich $\frac{1}{e} \cdot 37 = 13{,}6\ldots$ Zahlen nicht erscheinen.

Was ist wenn wir $n = 37000$-mal Roulette spielen?

Satz 2.38 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen für unabhängige Zufallsvariable mit beschränkter Varianz). *Seien $X_1, \ldots, X_n$ paarweise unabhängige Zufallsvariable mit gleichem Erwartungswert und endlicher Varianz $Var(X_k) \leq M$ für $1 \leq k \leq n$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{M}{n\varepsilon^2}\,.$$

Sei wie immer $X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls in der } i\text{-ten Runde die } 17 \text{ kommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$X_1, \ldots, X_n$ sind paarweise unabhängig und es ist $E(X_i) = \frac{1}{37}$ und $Var(X_i) = \frac{36}{37^2}$ für alle i.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) - E(X_1)\right| \geq \frac{1}{100}\right) \leq \frac{Var(X_1) \cdot 100^2}{n} = 0{,}00071\ldots$$

Tatsächliche durchschnittliche Anzahl von 17en

Erwartete durchschnittliche Anzahl von 17en

Stetige Zufallsvariable

Stetige Zufallsvariablen

Frage SZV: Ihr Bus kommt alle 5 Minuten (und wir gehen davon aus, dass das tatsächlich stimmt). Sie gehen ohne auf die Uhr zu gucken zur Haltestelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 2 Minuten warten müssen?

Antwort: $\frac{3}{5}$, **ABER das können wir formal noch nicht beschreiben!**

Wenn wir nur in ganzen Minuten messen: $\Omega = \{1,\ldots,5\}$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = \frac{1}{5}$

Wenn wir nur in halben Minuten messen: $\Omega = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \ldots, \frac{10}{2}\}$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = \frac{1}{10}$

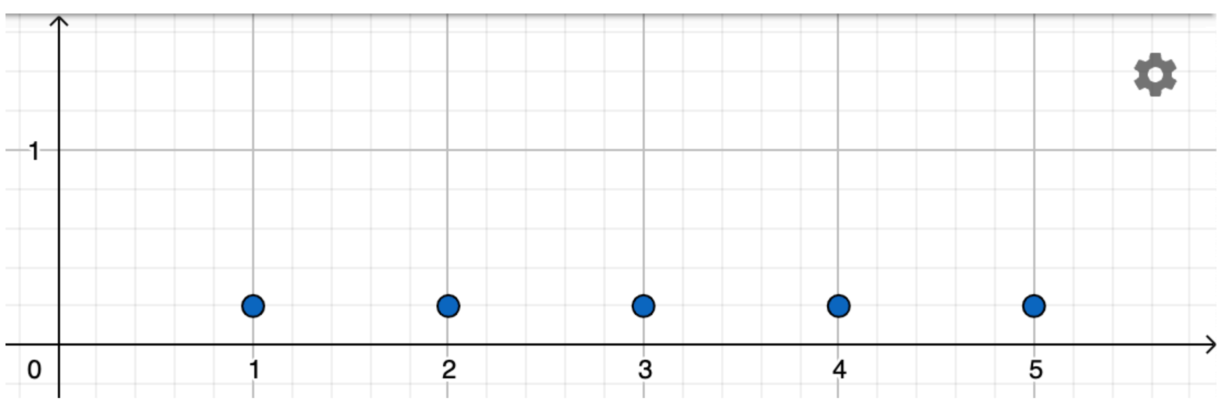
Wenn wir nur in Sekunden messen: $\Omega = \{1,2,\ldots,5 \cdot 60\}$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = \frac{1}{300}$

Wenn wir jede mögliche Dauer messen: $\Omega = (0,5]$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = 0$

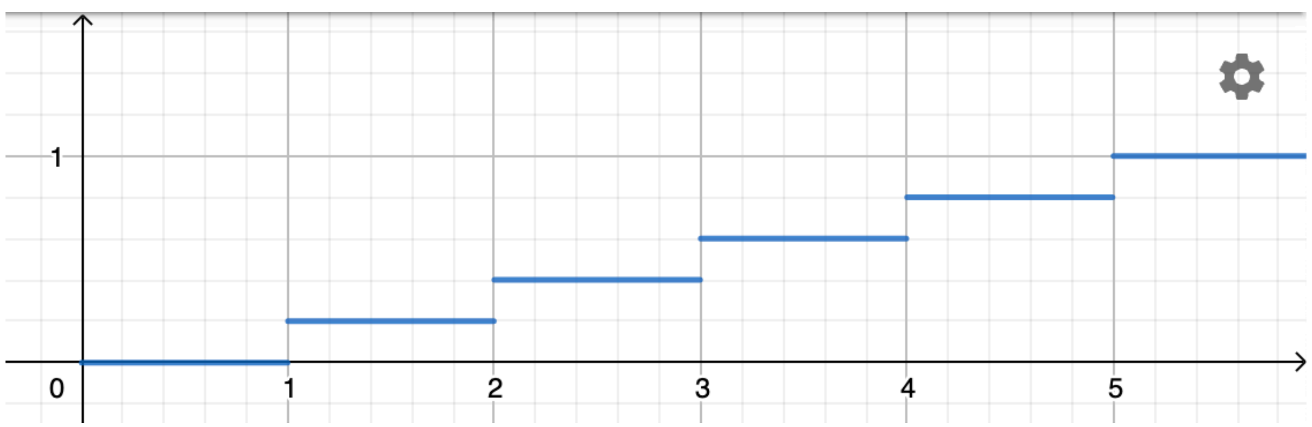
Stetige Zufallsvariablen

Frage SZV: Ihr Bus kommt alle 5 Minuten (und wir gehen davon aus, dass das tatsächlich stimmt). Sie gehen ohne auf die Uhr zu gucken zur Haltestelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 2 Minuten warten müssen?

Wenn wir nur in ganzen Minuten messen: $\Omega = \{1,\ldots,5\}$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = \frac{1}{5}$



$x \mapsto P(X = x)$

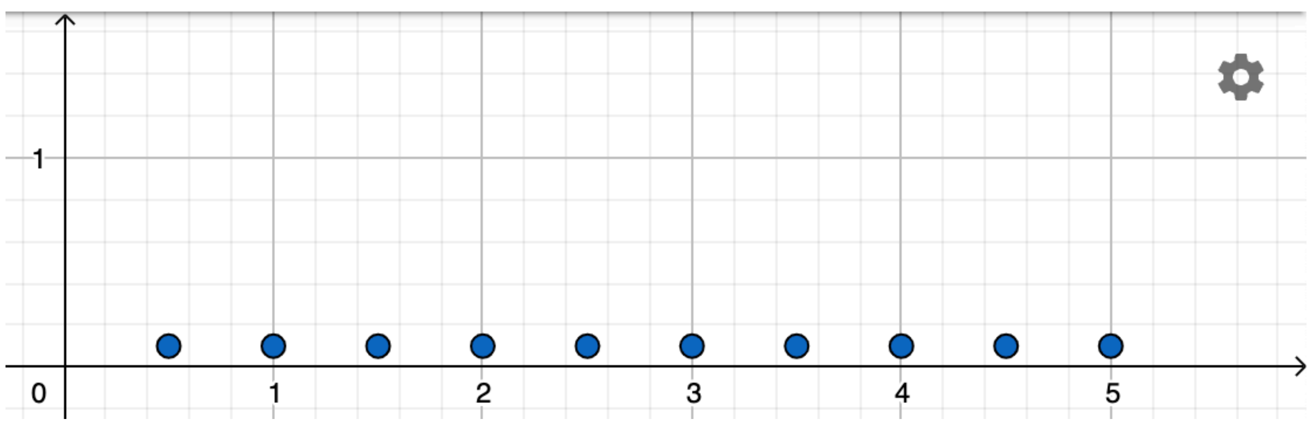


$x \mapsto P(X \leq x) = F(x)$

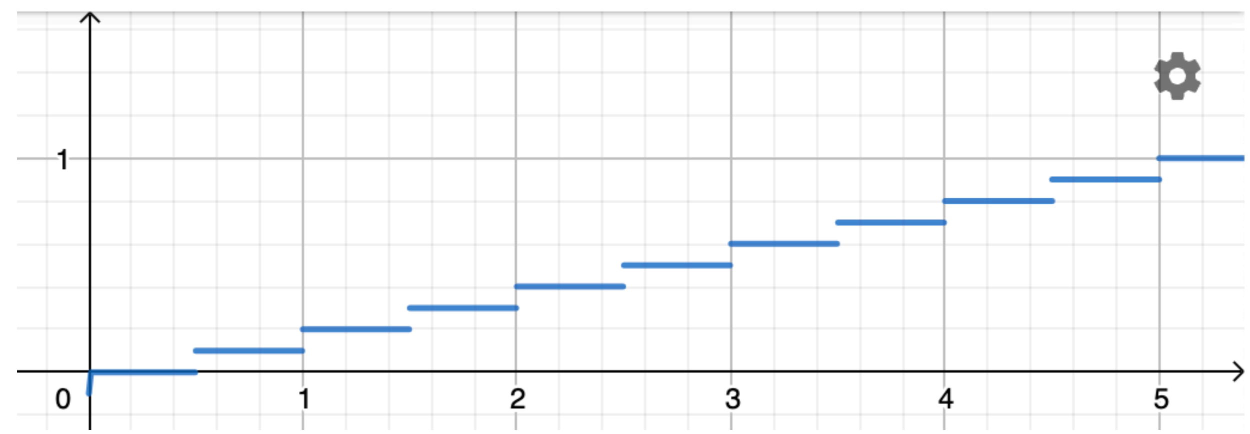
Stetige Zufallsvariablen

Frage SZV: Ihr Bus kommt alle 5 Minuten (und wir gehen davon aus, dass das tatsächlich stimmt). Sie gehen ohne auf die Uhr zu gucken zur Haltestelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 2 Minuten warten müssen?

Wenn wir nur in halben Minuten messen: $\Omega = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \ldots, \frac{10}{2} \right\}$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = \frac{1}{10}$



$x \mapsto P(X = x)$

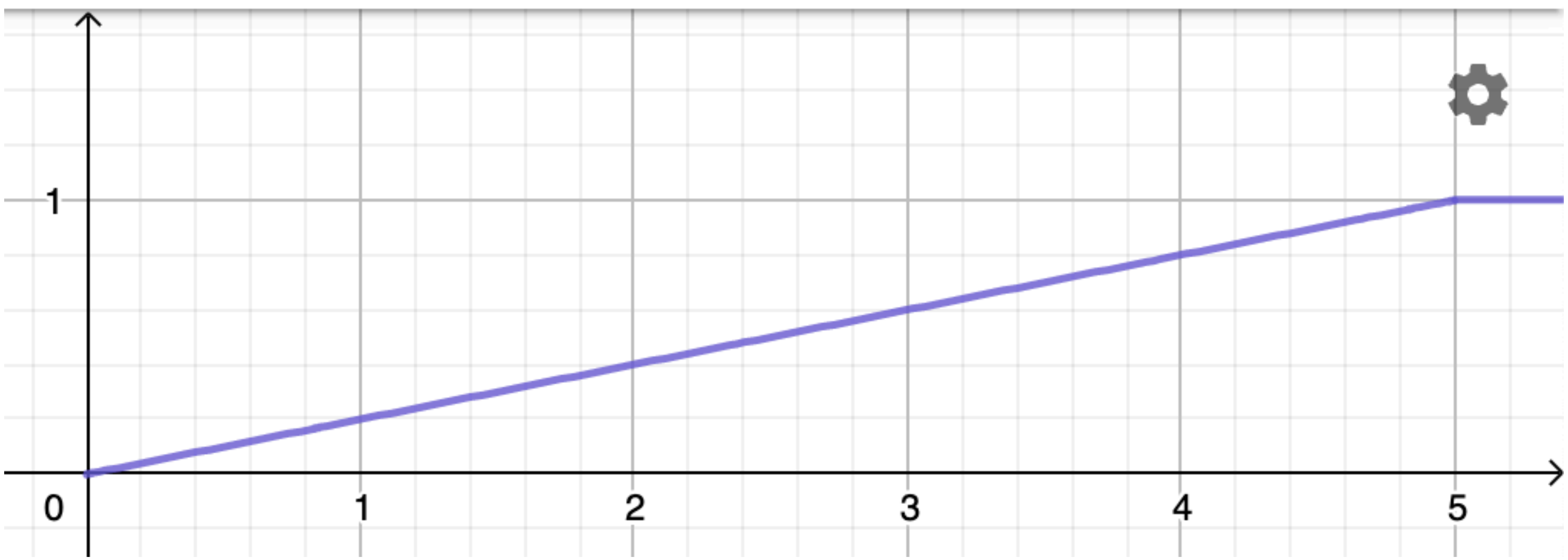


$x \mapsto P(X \leq x) = F(x)$

Stetige Zufallsvariablen

Frage SZV: Ihr Bus kommt alle 5 Minuten (und wir gehen davon aus, dass das tatsächlich stimmt). Sie gehen ohne auf die Uhr zu gucken zur Haltestelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 2 Minuten warten müssen?

Wenn wir nur in Sekunden messen: $\Omega = \{1,2,\ldots,5 \cdot 60\}$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = \dfrac{1}{300}$

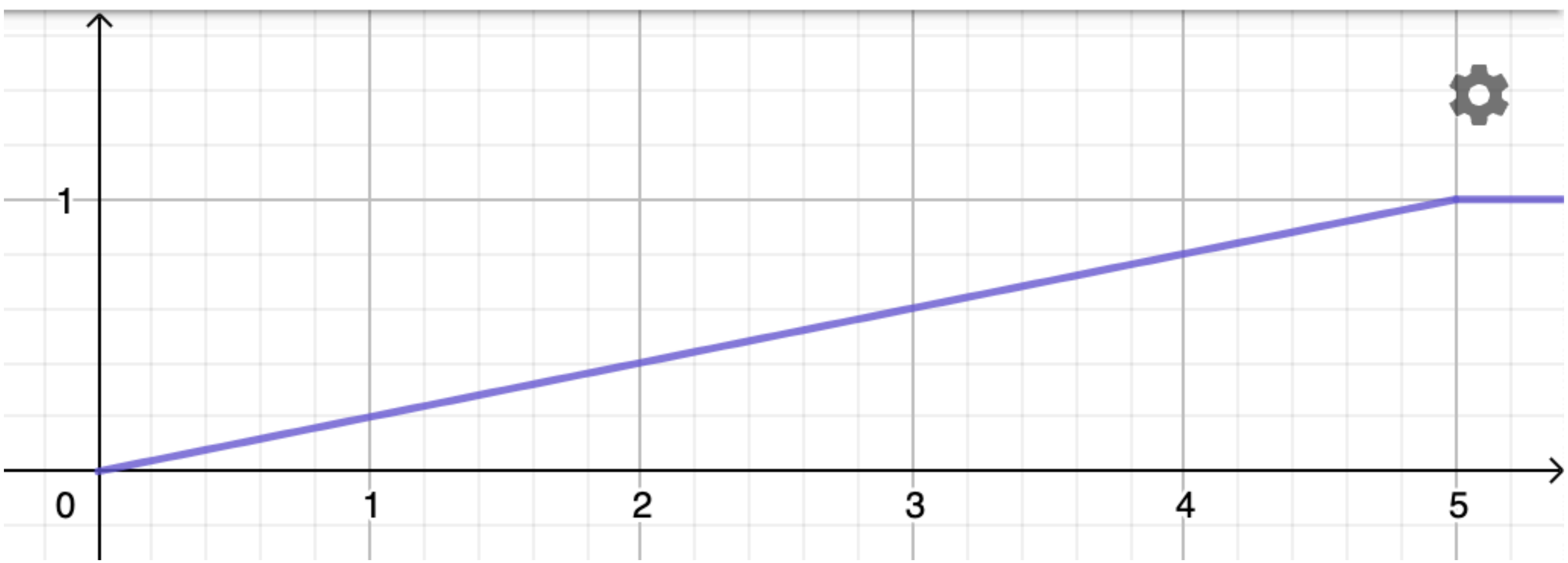


$$x \mapsto P(X \leq x) = F(x)$$

Stetige Zufallsvariablen

Frage SZV: Ihr Bus kommt alle 5 Minuten (und wir gehen davon aus, dass das tatsächlich stimmt). Sie gehen ohne auf die Uhr zu gucken zur Haltestelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 2 Minuten warten müssen?

Wenn wir jede mögliche Dauer messen: $\Omega = (0{,}5]$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = 0$



$$x \mapsto P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X \leq 2) = \frac{2}{5} \Longrightarrow P(X > 2) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Stetige Zufallsvariablen

Definition 3.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *stetige Zufallsvariable*, falls es eine integrierbare, nicht negative reelle Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

gibt mit der Eigenschaft

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt.$$

$$\boxed{\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1}$$

Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt \end{array}$$

heißt *Verteilungsfunktion* von X, die Funktion f heißt *Dichte* der Zufallsvariablen X.

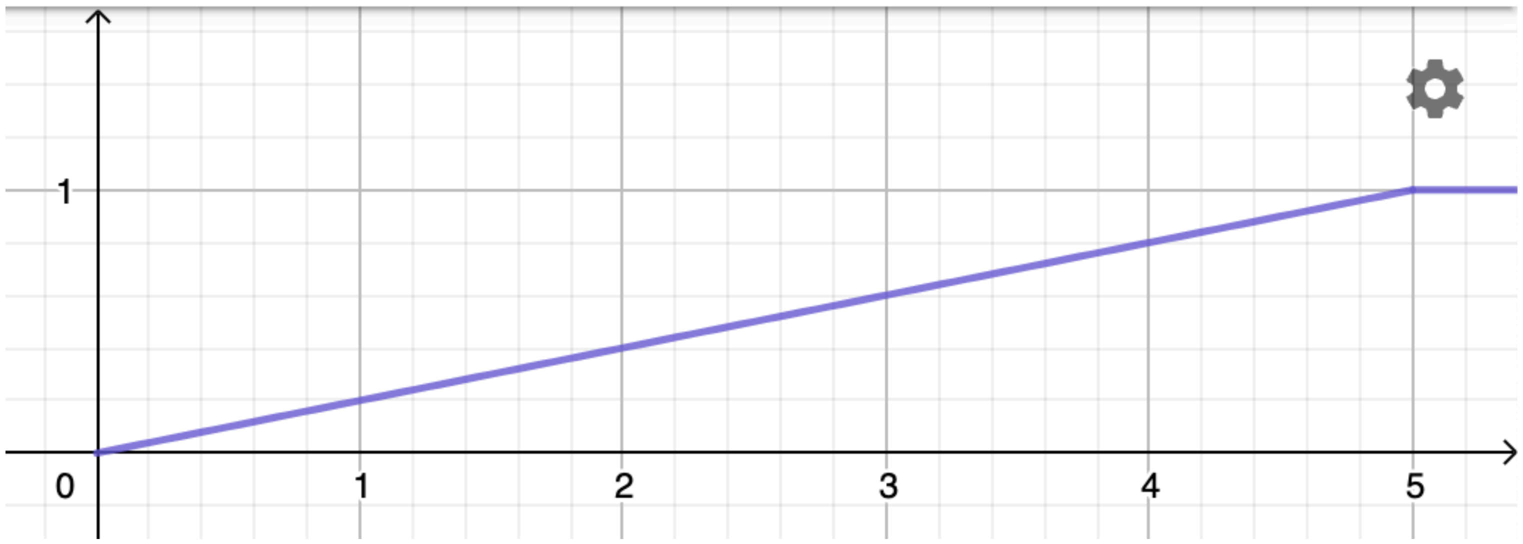
$$f(x) = F'(x)$$

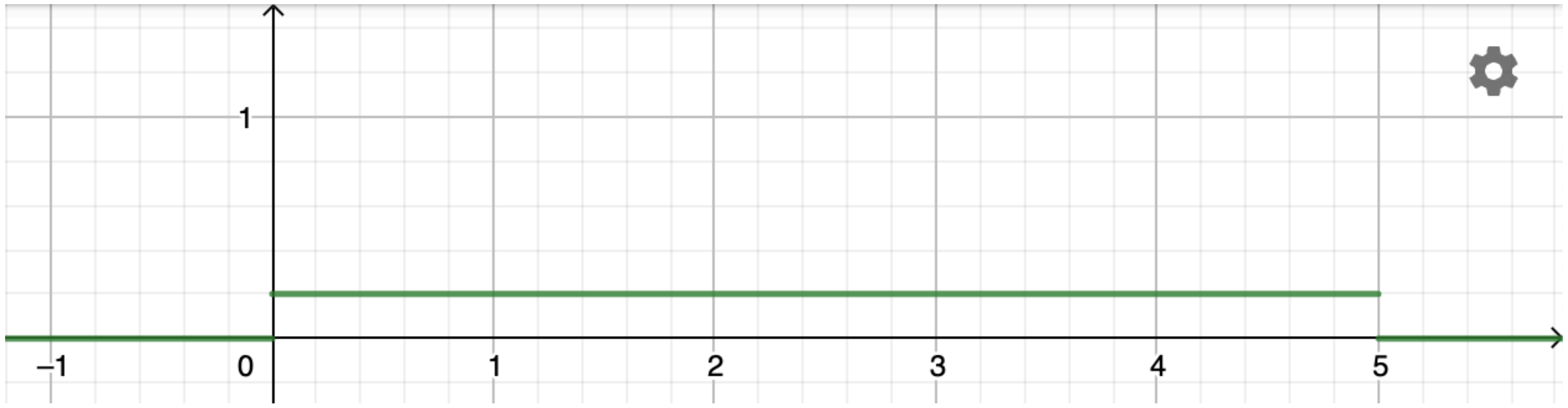
Stetige Zufallsvariablen

Frage SZV: **Ihr Bus kommt alle 5 Minuten (und wir gehen davon aus, dass das tatsächlich stimmt). Sie gehen ohne auf die Uhr zu gucken zur Haltestelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 2 Minuten warten müssen?**

Wenn wir jede mögliche Dauer messen: $\Omega = (0,5]$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = 0$

$$x \mapsto P(X \leq x) = F(x)$$





$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{falls } x \in [0,5] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

WICHTIG: $f(x) \neq P(X = x)$