Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

Vorlesung 8

Negative Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Frage NBV: **Wir führen dieses Zufallsexperiment wiederholt durch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der n-ten Wiederholung, die r-te 1 eintritt?**

Antwort: $\binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$ **für alle** $r \in \{1,\ldots,n\}$

Schreiben wir $n = k + r$, so dass k die Anzahl von 0en zählt, ergibt sich

$$\binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k$$

Das ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir vor der r-ten 1, genau k-mal eine 0 als Ergebnis hatten.

Negative Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.24.

Die diskrete Zufallsvariable X besitzt eine negative Binomialverteilung mit den Parametern $r \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P(X = k) = \binom{k + r - 1}{k} \cdot p^r \cdot (1 - p)^k.$$

Wir sagen kurz: X ist $Nb(r, p)$-verteilt.

Beispiel NBV: **Wir mischen ein Kartenspiel und schauen uns die oberste Karte an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem zehnten Mischen, die vierte Pik-Karte erscheint?**

Satz 2.26. *Ist die Zufallsvariable X $Nb(r, p)-$verteilt, so gilt*

$$E(X) = r\frac{1-p}{p} \quad und \quad Var(X) = r\frac{1-p}{p^2} \ .$$

Hypergeometrische Verteilung

Frage HGV: **Eine Urne enthalte N Kugeln. Davon sind genau S Kugeln schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter n ohne Zurücklegen gezogenen Kugeln genau k schwarze befinden?**

$= 0$, falls $k > S$

Antwort: $$\frac{\binom{S}{k} \cdot \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$= 0$, falls $k > n$

MIT ZURÜCKLEGEN hätten wir eine Binomial-Verteilung, mit $p = \frac{S}{N}$!

Hypergeometrische Verteilung

Definition 2.29.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt hypergeometrisch-verteilt mit den Parametern N, S und n, wenn für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$P(X = k) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Wir sagen kurz: X ist $H(N, S, n)$-verteilt.

Satz 2.31. *Ist X $H(N, S, n)-$verteilt, so gilt für den Erwartungswert*

$$E(X) = n\frac{S}{N}$$

und für die Varianz

$$Var(X) = n\,\frac{S}{N}\left(1 - \frac{S}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Hypergeometrische Verteilung

Satz 2.31. *Ist X $H(N,S,n)-$verteilt, so gilt für den Erwartungswert*

$$E(X) = n\frac{S}{N}$$

und für die Varianz

$$Var(X) = n\,\frac{S}{N}\left(1-\frac{S}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

X ist die Anzahl von gezogenen schwarzen Kugeln OHNE Zurücklegen.

Satz 2.20. *Ist X $B(n,p)-$verteilt, so gilt für den Erwartungswert $E(X) = np$ und für die Varianz $Var(X) = np(1-p)$.*

X ist die Anzahl von gezogenen schwarzen Kugeln MIT Zurücklegen $p = \frac{S}{N}$.

Gleicher Erwartungswert!

Binomialverteilung?

In der aktuellen Bundesliga-Saison (99 Spiele) wurden bis jetzt 3,21… Tore pro Spiel geschossen.

D.h.: Der Erwartungswert für die Anzahl der Tore in einem Spiel ist $\lambda = 3{,}21\ldots$

Frage: Verteilung für die Anzahl der Tore im kommenden Spiel?

Annahme:

- **Tore fallen unabhängig voneinander**
- **In jedem Augenblick jedes Spiels ist die Wahrscheinlichkeit eines Tors gleich groß**

Modell: Der Erwartungswert für die Anzahl von Toren in einem Zeitintervall ist proportional der Länge des Zeitintervalls.

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.17.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt binomial-verteilt mit den Parametern n und p, wenn für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: B_{n,p}(k).$$

Wir sagen kurz: X ist $B(n,p)$-verteilt.

Satz 2.20. *Ist X $B(n,p)-$verteilt, so gilt für den Erwartungswert $E(X) = np$ und für die Varianz $Var(X) = np(1-p)$.*

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.17.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt binomial-verteilt mit den Parametern n und p, wenn für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: B_{n,p}(k).$$

Wir sagen kurz: X ist $B(n,p)$-verteilt.

Satz 2.20. *Ist X $B(n,p)-$verteilt, so gilt für den Erwartungswert $E(X) = np$ und für die Varianz $Var(X) = np(1-p)$.*

Satz: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\lambda = p_n \cdot n$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n(1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-p_n n} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

D.h.: Für großes n und kleines p ist $B_{n,p}(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-pn}$.

Poisson Verteilung

Definition 2.33.
Eine diskrete Zufallsvariable X heißt Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$, wenn für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Wir sagen kurz: X ist $P(\lambda)$-verteilt.

Wird benutzt um die Anzahl von zufälligen Ereignissen an einem Ort, in einem Zeitabschnitt,… zu berechnen. Die Voraussetzung dafür sind:

1. **diese Ereignisse sind unabhängig voneinander**
2. **der Erwartungswert der Anzahl dieser Ereignisse ist proportional zur Größe des Ortes, des Zeitabschnittes, …**
3. λ **ist die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse im Ganzen**

Poisson Verteilung

In der aktuellen Bundesliga-Saison (99 Spiele) wurden bis jetzt 3,21… Tore pro Spiel geschossen.

D.h.: Der Erwartungswert für die Anzahl der Tore in einem Spiel ist $\lambda = 3{,}21\ldots$

	Geschätzt	Tatsächlich
Anteil torloser Spiele (0:0)	$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \approx 4{,}0/99$	$10/99$
Anteil der Spiele mit genau einem Tor (1:0,0:1)	$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} \approx 12{,}8/99$	$9/99$
Anteil der Spiele mit genau zwei Toren (2:0,1:1, 0:2)	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} \approx 20{,}6/99$	$19/99$
Anteil der Spiele mit genau drei Toren (3:0, 2:1,1:2, 0:3)	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} \approx 22{,}0/99$	$18/99$
Anteil der Spiele mit genau vier Toren (4:0, 3:1, 2:2, 1:3, 0:4)	$\frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda} \approx 17{,}7/99$	$19/99$

Poisson Verteilung

Satz 2.34. *Ist X $P(\lambda)$-verteilt, so gilt für den Erwartungswert bzw. die Varianz*

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda,$$

wobei wir $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$, *verwendet haben. Wegen* $k^2 = k(k-1) + k$ *gilt weiter*

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k-\lambda)^2 \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} - 2\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \\ &= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} - 2\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda^2 e^{\lambda} \right) = \lambda. \end{aligned}$$