Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

Vorlesung 7

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Frage BV: Wir führen dieses Zufallsexperiment n-mal durch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau k-mal der Wert 1 herauskommt?

Die Antwort ist 0, falls $k > n$ oder $k < 0$.

Allgemein ist die Antwort $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Ein solches mehrstufiges Experiment nennen wir Bernoulli-Experiment vom Umfang n.

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.17.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt binomial-verteilt mit den Parametern n und p, wenn für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: B_{n,p}(k).$$

Wir sagen kurz: X ist $B(n,p)$-verteilt.

Beispiel 1: **Eine Maschine stellt Produkte her. Man weiß, dass 5% der Produkte fehlerhaft sind. Die Produkte werden in Kisten mit je 100 Produkten verpackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste genau 6 fehlerhafte Produkte sind?**

Beispiel 2: **In der Situation von oben: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste genau 94 heile Produkte sind?**

Beispiel 3: **In der Situation von oben: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste höchstens 6 fehlerhafte Produkte sind?**

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.17.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt binomial-verteilt mit den Parametern n und p, wenn für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: B_{n,p}(k).$$

Wir sagen kurz: X ist $B(n,p)$-verteilt.

Satz 2.18. *(a) Es gilt für* $0 \leq k \leq n$

$$B_{n,p}(k) = B_{n,1-p}(n-k).$$

(b) Sei X die Zufallsvariable, die in einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit Wahrscheinlichkeitsparameter p die Anzahl der Erfolge misst. Sei $\overline{X}$ die Zufallsvariable, die die Anzahl der Misserfolge misst. Dann gilt für $0 \leq m \leq n$:

$$P(X \leq m) = 1 - P(\overline{X} \leq n - m - 1)\ .$$

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Satz 2.18. *(a) Es gilt für $0 \leq k \leq n$*

$$B_{n,p}(k) = B_{n,1-p}(n-k).$$

(b) Sei X die Zufallsvariable, die in einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit Wahrscheinlichkeitsparameter p die Anzahl der Erfolge misst. Sei $\overline{X}$ die Zufallsvariable, die die Anzahl der Misserfolge misst. Dann gilt für $0 \leq m \leq n$:

$$P(X \leq m) = 1 - P(\overline{X} \leq n - m - 1)\ .$$

Beispiel 4: **Aus einer Urne mit genau 30 Kugeln, nämlich 12 weißen und 18 roten werden (blind) nacheinander und mit Zurücklegen genau 50 Kugeln entnommen. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den entnommenen Kugeln höchstens die Hälfte rot ist.**

$$P_{n;p}\left(X \le k\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot \left(1-p\right)^{n-i}$$

p

n	**k**		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		**n**
	0	0,	6035	4670	2774	0718	0105	0038	0008	0001	0000	0000	0000	**24**	
	1		9114	8280	6424	2712	0629	0274	0070	0016	0005	0001	0000	**23**	
	2		9868	9620	8729	5371	1887	0982	0321	0090	0035	0004	0000	**22**	
	3		9986	9938	9659	7636	3816	2340	0962	0332	0149	0024	0001	**21**	
	4		9999	9992	9928	9020	5937	4207	2137	0905	0462	0095	0005	**20**	
	5			9999	9988	9666	7720	6167	3783	1935	1120	0294	0020	**19**	
	6				9998	9905	8908	7800	5611	3407	2215	0736	0073	**18**	
	7					9977	9553	8909	7265	5118	3703	1536	0216	**17**	
	8					9995	9843	9532	8506	6769	5376	2735	0539	**16**	
	9					9999	9953	9827	9287	8106	6956	4246	1148	**15**	
25	**10**						9988	9944	9703	9022	8220	5858	2122	**14**	**25**
	11						9997	9985	9893	9558	9082	7323	3450	**13**	
	12						9999	9996	9966	9825	9585	8462	5000	**12**	
	13							9999	9991	9940	9836	9222	6550	**11**	
	14								9998	9982	9944	9656	7878	**10**	
	15									9995	9984	9868	8852	**9**	
	16									9999	9996	9957	9461	**8**	
	17										9999	9988	9784	**7**	
	18											9997	9927	**6**	
	19											9999	9980	**5**	
	20												9995	**4**	
	21												9999	**3**	
	0	0,	3642	2181	0769	0052	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	**49**	
	1		7358	5553	2794	0338	0012	0002	0000	0000	0000	0000	0000	**48**	
	2		9216	8108	5405	1117	0066	0013	0001	0000	0000	0000	0000	**47**	
	3		9822	9372	7604	2503	0238	0057	0005	0000	0000	0000	0000	**46**	
	4		9968	9832	8964	4312	0643	0185	0021	0002	0000	0000	0000	**45**	
	5		9995	9963	9622	6161	1388	0480	0070	0007	0001	0000	0000	**44**	
	6		9999	9993	9882	7702	2506	1034	0194	0025	0005	0000	0000	**43**	
	7			9999	9968	8779	3911	1904	0453	0073	0017	0001	0000	**42**	
	8				9992	9421	5421	3073	0916	0183	0050	0002	0000	**41**	
	9				9998	9755	6830	4437	1637	0402	0127	0008	0000	**40**	
	10					9906	7986	5836	2622	0789	0284	0022	0000	**39**	
	11					9968	8827	7107	3816	1390	0570	0057	0000	**38**	
	12					9990	9373	8139	5110	2229	1035	0133	0002	**37**	
	13					9997	9693	8894	6370	3279	1715	0280	0005	**36**	
	14					9999	9862	9393	7481	4468	2612	0540	0013	**35**	
	15						9943	9692	8369	5692	3690	0955	0033	**34**	
	16						9978	9856	9017	6839	4868	1561	0077	**33**	
	17						9992	9937	9449	7822	6046	2369	0164	**32**	
50	**18**						9997	9975	9713	8594	7126	3356	0325	**31**	**50**
	19						9999	9991	9861	9152	8036	4465	0595	**30**	
	20							9997	9937	9522	8741	5610	1013	**29**	
	21							9999	9974	9749	9244	6701	1611	**28**	
	22								9990	9877	9576	7660	2399	**27**	
	23								9996	9944	9778	8438	3359	**26**	
	24								9999	9976	9892	9022	4439	**25**	
	25									9991	9951	9427	5561	**24**	
	26									9997	9979	9686	6641	**23**	
	27									9999	9992	9840	7601	**22**	
	28										9997	9924	8389	**21**	
	29										9999	9966	8987	**20**	
	30											9986	9405	**19**	
	31											9995	9675	**18**	
	32											9998	9836	**17**	
	33											9999	9923	**16**	
	34												9967	**15**	
	35												9987	**14**	
	36												9995	**13**	
	37		Nicht aufgeführte Werte sind 1,0000.										9998	**12**	
n			0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	**k**	**n**

p

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \ge \frac{1}{2}$, gilt: $P\left(X \le k\right) = 1 - \textit{abgelesener Wert}$.

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.17.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt binomial-verteilt mit den Parametern n und p, wenn für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: B_{n,p}(k).$$

Wir sagen kurz: X ist $B(n,p)$-verteilt.

Satz 2.20. *Ist X $B(n,p)-$verteilt, so gilt für den Erwartungswert $E(X) = np$ und für die Varianz $Var(X) = np(1-p)$.*

Beispiel 1: Eine Maschine stellt Produkte her. Man weiß, dass 5% der Produkte fehlerhaft sind. Die Produkte werden in Kisten mit je 100 Produkten verpackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste genau 6 fehlerhafte Produkte sind?

Beispiel 4: In der Situation von oben: Wie groß ist der Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable, die die Anzahl der fehlerhaften Produkte in einer Kiste misst?

Geometrische Verteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Frage GV: **Wir führen dieses Zufallsexperiment wiederholt durch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass vor der ersten 1 genau k-mal das Ereignis 0 eingetroffen ist?**

Antwort: $(1-p)^k p$ **für alle** $k \in \mathbb{N}_0$

Geometrische Verteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.21.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt geometrisch-verteilt mit dem Parameter $0 < p < 1$, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P(X = k) = (1 - p)^k \cdot p.$$

Wir sagen kurz: X ist $G(p)$-verteilt.

Diese Verteilung erhalten wir typischerweise, wenn nach Wartezeiten auf das erste Eintreffen eines Ereignisses gefragt ist.

Satz 2.22. *Ist X $G(p)-$verteilt, so gilt für den Erwartungswert $E(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$ und für die Varianz $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.*