Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

Vorlesung 6

Unabhängigkeit

Definition 1.21

(i) Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B);$$

andernfalls heißen sie abhängig. Für $n \geq 2$ heißen n Ereignisse $A_1, A_2 \ldots, A_n$ (stochastisch) unabhängig, falls für alle mindestens zweielementigen Teilmengen $T \subset \{1,2\ldots,n\}$ gilt:

10

$$P\left(\bigcap_{j \in T} A_j\right) = \prod_{j \in T} P(A_j).$$

(ii) Eine Familie von Ereignissen $(A_i)_{i \in I} \subset \mathscr{A}$ heißt paarweise (stochastisch) unabhängig, falls

$$P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad \forall i, j \in I, i \neq j.$$

Zufallsvariablen

Definition 2.8

Zwei diskrete Zufallsvariable X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω heißen unabhängig, wenn die Ereignisse

$$(X = x) \text{ und } (Y = y)$$

für jedes beliebige Tupel

$$(x, y) \text{ mit } x \in X(\Omega) \text{ und } y \in Y(\Omega)$$

unabhängig sind, d.h. wenn gilt:

$$P\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

Andernfalls heißen X und Y abhängig.

Zufallsvariablen

Definition 2.8

Zwei diskrete Zufallsvariable X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω heißen unabhängig, wenn die Ereignisse $(X = x)$ und $(Y = y)$ für jedes beliebige Tupel (x, y) mit $x \in X(\Omega)$ und $y \in Y(\Omega)$ unabhängig sind, d.h. wenn gilt:

$$P\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

Zufallsvariable	**Definition**	**Bedeutung**
X	$\begin{cases} 35 & \text{falls } \omega = 17 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$	**Wir setzen auf die 17**
Y	$\begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \neq 0 \text{ gerade} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$	**Wir setzen auf „gerade“**

Diese Zufallsvariablen sind abhängig.

Zufallsvariablen

Erwartungswert von X:

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Satz 2.12. *(ii)*

Für unabhängige Zufallsvariable X und Y gilt:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Zufallsvariablen

Varianz von X:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

Satz 2.12. *(ii)*

Für unabhängige Zufallsvariable X und Y gilt:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Satz 2.16. *(iii)*

Sind $X_1, \ldots, X_n$ paarweise unabhängig, so gilt

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k).$$

Varianz

Definition 2.13.

(c) Sind X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen und existieren $E(X^2)$ und $E(Y^2)$, so heißt

$$Cov(X, Y) := E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

die Covarianz von X und Y und

$$\rho_{XY} := \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

der Korrelationskoeffizient von X und Y.

X und Y heißen unkorreliert, wenn die Covarianz $Cov(X, Y) = 0$ ist.

Satz 2.15.

Sind zwei diskrete Zufallsvariable X und Y unabhängig, so sind sie auch unkorreliert.

Spezielle Verteilungen

Binomialverteilung

Bei einigen Zufallsexperimenten gab es nur zwei mögliche Ausgänge

Kopf oder Zahl
Gewinn oder Niete
6 oder keine 6
Richtig oder falsch

Diese Situation möchten wir allgemein studieren.

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Frage BV: Wir führen dieses Zufallsexperiment n-mal durch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau k-mal der Wert 1 herauskommt?

Die Antwort ist 0, falls $k > n$ oder $k < 0$.

Allgemein ist die Antwort $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Ein solches mehrstufiges Experiment nennen wir Bernoulli-Experiment vom Umfang n.

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.17.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt binomial-verteilt mit den Parametern n und p, wenn für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: B_{n,p}(k).$$

Wir sagen kurz: X ist $B(n,p)$-verteilt.

Beispiel 1: Eine Maschine stellt Produkte her. Man weiß, dass 5% der Produkte fehlerhaft sind. Die Produkte werden in Kisten mit je 100 Produkten verpackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste genau 6 fehlerhafte Produkte sind?

Beispiel 2: In der Situation von oben: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste genau 94 heile Produkte sind?

Beispiel 3: In der Situation von oben: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste höchstens 6 fehlerhafte Produkte sind?

Binomialverteilung

Wir betrachten das Zufallsexperiment $(\{0,1\}, P)$, mit $P(1) = p$ und (notgedrungen) $P(0) = 1 - p$. Hier ist $p \in [0,1]$.

Definition 2.17.

Eine diskrete Zufallsvariable X heißt binomial-verteilt mit den Parametern n und p, wenn für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: B_{n,p}(k).$$

Wir sagen kurz: X ist $B(n,p)$-verteilt.

Satz 2.18. *(a) Es gilt für $0 \leq k \leq n$*

$$B_{n,p}(k) = B_{n,1-p}(n-k).$$

(b) Sei X die Zufallsvariable, die in einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit Wahrscheinlichkeitsparameter p die Anzahl der Erfolge misst. Sei $\overline{X}$ die Zufallsvariable, die die Anzahl der Misserfolge misst. Dann gilt für $0 \leq m \leq n$:

$$P(X \leq m) = 1 - P(\overline{X} \leq n - m - 1)\ .$$