Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

Vorlesung 4

Ab sofort:

Tutorien:

Montags:	10:15 - 11:45 in Raum LK052
	12:15 - 13:45 in Raum LD102
Mittwochs:	14:15 - 15:45 in Raum LE 102
	16:15 - 17:45 in Raum LK052
Donnerstags:	~~14:15 - 15:45~~ in Raum LA013
	14:00 - 15:30
~~**Freitags:**~~	~~12:15 - 13:45 in Raum LE105~~

+ NEU: Dienstags 14:15 - 15:45 in Raum LE 103

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 1.15

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sind A und B zwei Ereignisse und $P(B) > 0$, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A\,|\,B) = P_B(A)$ (``Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B´´) definiert durch

$$P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Folgerung 1.18. Es sei $B \in \mathcal{A}$ mit $0 < P(B) < 1$, d.h. auch $0 < P(\overline{B}) < 1$. Dann ist für beliebiges $A \in \mathcal{A}$:

$$P(A) = P_B(A) \cdot P(B) + P_{\overline{B}}(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Verallgemeinerung davon ist

Satz 1.17 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit). *Es sei* $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ *eine disjunkte Zerlegung mit* $P(B_k) > 0$ *für* $1 \leq k \leq n$. *Dann gilt für beliebiges* $A \in \mathcal{A}$:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A).$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

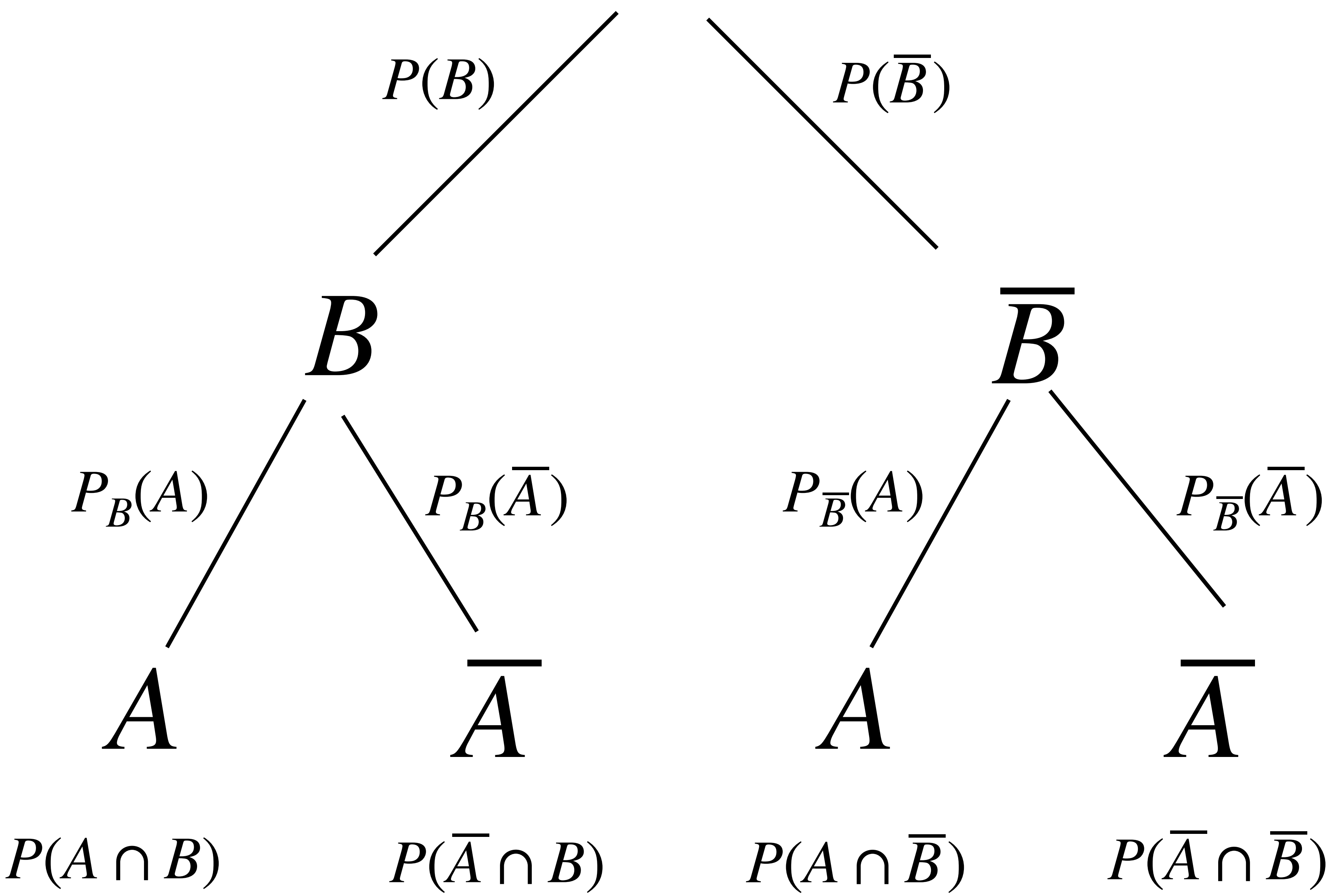
Satz 1.19 (Satz von Bayes). *Es sei* $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ *eine disjunkte Zerlegung mit* $P(B_k) > 0$ *für* $1 \leq k \leq n$. *Ist* $A \in \mathcal{A}$ *beliebig mit* $P(A) > 0$, *so gilt*

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}.$$

Ist $n = 2$, *so erhalten wir mit* $B_1 = B$ *und* $B_2 = \overline{B}$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}\ .$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten



Daraus abzulesen: Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

Beispiel BW: Etwa 3 von 1000 Kindern werden mit einem Hörschaden geboren. Ein Hörscreening bei Neugeborenen liefert in 94% der Fälle ein richtiges positives Ergebnis und in 97,57% der Fälle ein richtiges negatives Ergebnis.

Sei H das Ereignis: Kind hat Hörschaden

Sei T das Ereignis: Test ist positiv

$P(H) = 0{,}003 \quad P(\overline{H}) = 0{,}997$

$P_H(T) = 0{,}94 \quad P_H(\overline{T}) = 0{,}06$

$P_{\overline{H}}(\overline{T}) = 0{,}9757 \quad P_{\overline{H}}(T) = 0{,}0243$

(b) Ein zufällig gewähltes Neugeborenes wird positiv getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind einen Hörschaden hat?

$$\begin{aligned} P_T(H) &= \frac{P(T \cap H)}{P(H) \cdot P_H(T) + P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(T)} \\ &= \frac{P(H) \cdot P_H(T)}{P(H) \cdot P_H(T) + P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(T)} \\ &= \frac{0{,}003 \cdot 0{,}94}{0{,}003 \cdot 0{,}94 + 0{,}997 \cdot 0{,}0243} = 0{,}1042\ldots \end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

Beispiel BW: Etwa 3 von 1000 Kindern werden mit einem Hörschaden geboren. Ein Hörscreening bei Neugeborenen liefert in 94% der Fälle ein richtiges positives Ergebnis und in 97,57% der Fälle ein richtiges negatives Ergebnis.

Sei H das Ereignis: Kind hat Hörschaden

Sei T das Ereignis: Test ist positiv

$$P(H) = 0{,}003 \qquad P(\overline{H}) = 0{,}997$$

$$P_H(T) = 0{,}94 \qquad P_H(\overline{T}) = 0{,}06$$

$$P_{\overline{H}}(\overline{T}) = 0{,}9757 \quad P_{\overline{H}}(T) = 0{,}0243$$

(c) Ein zufällig gewähltes Neugeborenes wird negativ getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind keinen Hörschaden hat?

$$P_{\overline{T}}(\overline{H}) = \frac{P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(\overline{T})}{P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(\overline{T}) + P(H) \cdot P_H(\overline{T})}$$

$$= \frac{0{,}997 \cdot 0{,}9757}{0{,}997 \cdot 0{,}9757 + 0{,}003 \cdot 0{,}06} = 0{,}9998\ldots$$

Unabhängigkeit

Definition 1.21

(i) Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B);$$

andernfalls heißen sie abhängig. Für $n \geq 2$ heißen n Ereignisse $A_1, A_2 \ldots, A_n$ (stochastisch) unabhängig, falls für alle mindestens zweielementigen Teilmengen $T \subset \{1,2 \ldots, n\}$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{j \in T} A_j\right) = \prod_{j \in T} P(A_j).$$

(ii) Eine Familie von Ereignissen $(A_i)_{i \in I} \subset \mathscr{A}$ heißt paarweise (stochastisch) unabhängig, falls

$$P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad \forall i, j \in I, i \neq j.$$

Unabhängigkeit

Lemma 1.23:

1. Sind A und B stochastisch unabhängig, so sind auch A und $\bar{B}$, bzw. $\bar{A}$ und $\bar{B}$ stochastisch unabhängig.
2. Sind A und B Ereignisse mit $P(B) > 0$, so gilt
$$A \text{ und } B \text{ sind unabhängig} \iff P_B(A) = P(A).$$
3. Ist A eine sogenannte Nullmenge, d.h. $P(A) = 0$, so sind A und B stochastisch unabhängig für alle $B \in \mathscr{A}$.

Diskrete Zufallsvariablen

Zufallsvariablen

Bei vielen Zufallsexperimenten ist nicht der tatsächliche Ausgang des Experimentes von Interesse, sondern ein diesem Ausgang zugeordneter Wert.

Wenn Sie Lotto gespielt haben, ist Ihnen egal welche Zahlen gezogen wurden. Wichtig ist nur, wie viel Geld man gewonnen (oder verloren) hat!

Zufallsvariablen

Definition 2.1

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Mit endlichem oder abzählbarem Wertebereich

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

heißt diskrete Zufallsvariable auf Ω.

Zufallsvariablen

Sei X eine (diskrete) Zufallsvariable auf Ω. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Ereignisse:

$(X = x) := \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$ **und** $(X \leq x) := \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}$.

Definition 2.3

(a) Die Funktion

$$\begin{aligned} V = V_X : \; X(\Omega) &\to [0,1] \\ x &\mapsto V(x) = P(X = x) \end{aligned}$$

heißt Verteilung der Zufallsvariablen X.

(b) Die Funktion $F = F_X : \; \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$F(x) = P(X \leq x)$$

heißt Verteilungsfunktion von X.

Zufallsvariablen

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$$

$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}$$

Satz 2.5. *Ist X eine diskrete Zufallsvariable mit Wertemenge $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, so gilt für die zugehörige Verteilungsfunktion F:*

(a) *Für $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$.*

(b) *Ist $x < y$, so gilt $F(x) \leq F(y)$. (Monotonie)*

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$