Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

Vorlesung 3

LERN UND DISKUSSIONSZENTRUM

LUDI MATHE
RAUM ZUM LERNEN
ZEIT FÜR FRAGEN

Das Mathe-LuDi bietet

- Raum zum Arbeiten, Lernen, Denken, Diskutieren
- Unterstützung bei inhaltlichen Fragen, Grundlagen, Übungsblättern
- **Persönliche Unterstützung durch Fachtutor/inn/en**

… vom ~~21~~ 22.10.24 bis zum 20.2.25

Wann? Mo 14-18 Uhr, Di-Fr 10-18 Uhr
Wo? **BC520 (vor Ort)**
Bismarckstraße 90, Duisburg
Zusätzlich: 13-15 Uhr online,
https://moodle.uni-due.de/course/view.php?id=12219
Passwort: ludi

Mehrstufige Zufallsexperimente

Wie viele Snacks aus einem Obst, einem Gebäck und einem Getränk können Sie sich aus den folgenden Zutaten zusammenstellen?

1.Schritt	2.Schritt	3.Schritt
🍏🍉🍍🍓	🥯🥨	🥛☕🍺

Antwort: $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

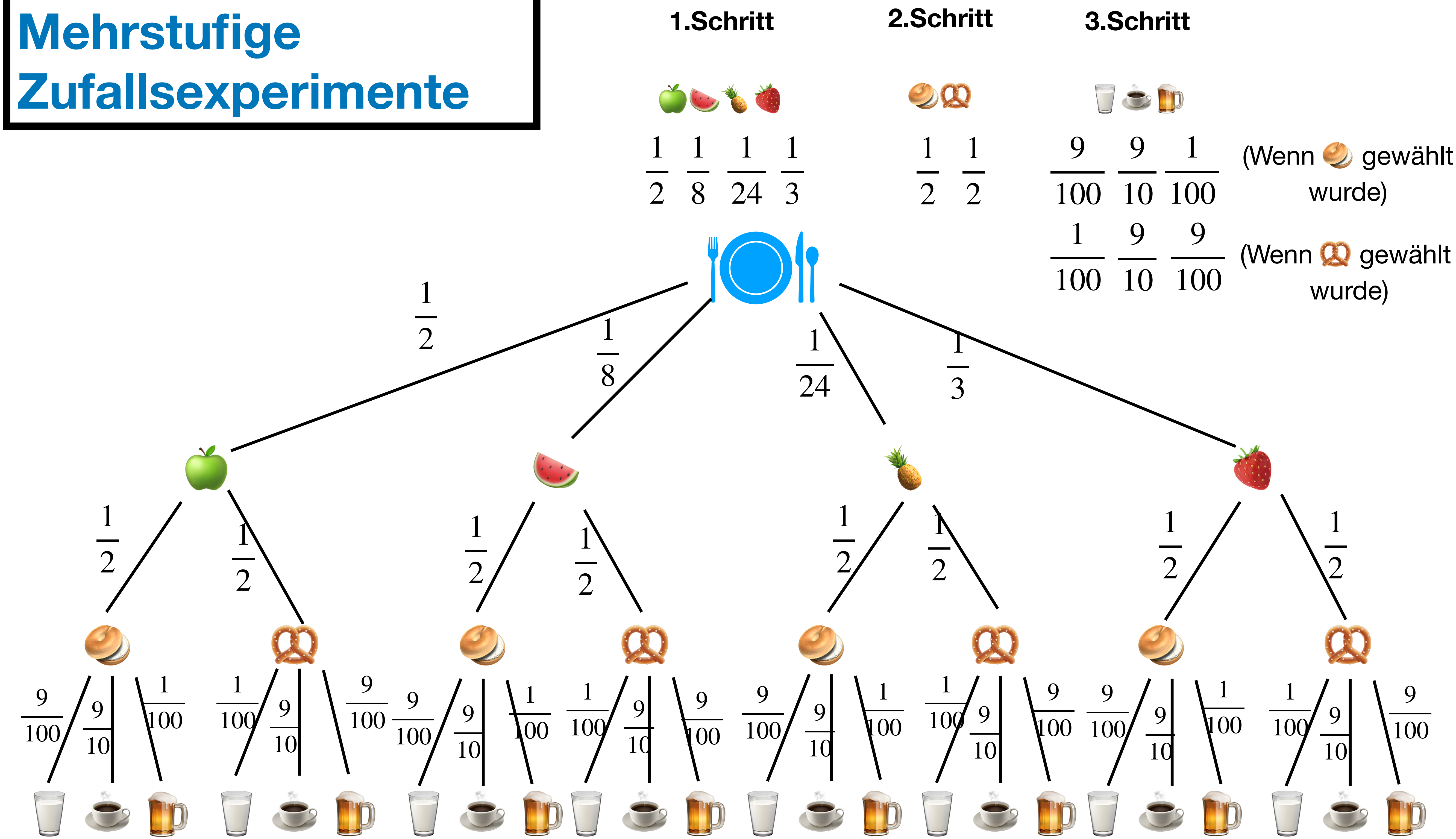
Sie wählen nun zufällig Obst, Gebäck und Getränk. Dann haben Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{24}$ **einen bestimmten Snack zusammengestellt.**

Mehrstufige Zufallsexperimente

	1.Schritt				2.Schritt		3.Schritt		
	🍏	🍉	🍍	🍓	🥯	🥨	🥛	☕	🍺
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{100}$
							(Wenn 🥯 gewählt wurde)		
							$\frac{1}{100}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{100}$
							(Wenn 🥨 gewählt wurde)		

Nun wählen Sie zufällig ein Obst, ein Gebäck und ein Getränk. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen ein Produkt gewählt wird, sind angegeben (wir haben keine Gleichverteilung).

Mehrstufige Zufallsexperimente



P(🥛|🥯)=P(🥛|🥯,🍏)=9/100

P(🥛|🥨)=P(🥛|🥨,🍏)=1/100

Mehrstufige Zufallsexperimente

Ziegenproblem (Monty-Hall-Problem):

- Hinter einer von drei Türen ist der Hauptgewinn (Auto), hinter den anderen beiden sitzt eine Ziege
- Sie wählen eine Tür aus.
- Der Showmaster öffnet eine der anderen Türen, hinter der eine Ziege sitzt.
- Sie dürfen, wenn Sie wollen nochmal die Tür wechseln.
- Sollten Sie?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Etwa 70% aller über 60-jährigen, mit schwerem Corona-Verlauf, waren vollständig geimpft!

Alle Angaben stammen vom RKI aus 09.22.	Schwerer Covid-Verlauf	Gesamt
Geimpft	642	21.980.000
Nicht geimpft	265	2.250.000

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

WT 23/24 Klausur…

	Keine Bonuspunkte	Bonuspunkte
Bestanden	24	60
Nicht bestanden	34	22

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person bestanden hat, ist gleich $\frac{84}{140} = 60\,\%$ **.**

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Bonuspunkten bestanden hat, ist gleich $\frac{60}{82} \approx 73\,\%$ **.**

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person ohne Bonuspunkte bestanden hat, ist gleich $\frac{24}{58} \approx 41\,\%$ **.**

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Seien $A,\ B$ Ereignisse. Dann nennen wir die Aufteilung

	B	$\overline{B}$
A	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

Vierfeldertafel.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 1.15

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sind A und B zwei Ereignisse und $P(B) > 0$, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A\,|\,B) = P_B(A)$ („Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B") definiert durch

$$P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Das Simpson-Paradoxon über bedingte Wahrscheinlichkeiten

	Frauen		Männer	
	Bewerbungen	zugelassen	Bewerbungen	zugelassen
Summe	1000	740 (74 %)	1000	420 (42 %)

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Das Simpson-Paradoxon über bedingte Wahrscheinlichkeiten

	Frauen		Männer	
	Bewerbungen	zugelassen	Bewerbungen	zugelassen
Fach 1	900	720 (80 %)	200	180 (90 %)
Fach 2	100	20 (20 %)	800	240 (30 %)
Summe	1000	740 (74 %)	1000	420 (42 %)

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Folgerung 1.18. Es sei $B \in \mathcal{A}$ mit $0 < P(B) < 1$, d.h. auch $0 < P(\overline{B}) < 1$. Dann ist für beliebiges $A \in \mathcal{A}$:

$$P(A) = P_B(A) \cdot P(B) + P_{\overline{B}}(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Verallgemeinerung davon ist

Satz 1.17 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit). *Es sei* $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ *eine disjunkte Zerlegung mit* $P(B_k) > 0$ *für* $1 \leq k \leq n$. *Dann gilt für beliebiges* $A \in \mathcal{A}$:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A).$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Folgerung 1.18. Es sei $B \in \mathcal{A}$ mit $0 < P(B) < 1$, d.h. auch $0 < P(\overline{B}) < 1$. Dann ist für beliebiges $A \in \mathcal{A}$:

$$P(A) = P_B(A) \cdot P(B) + P_{\overline{B}}(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Beispiel BW: Etwa 3 von 1000 Kindern werden mit einem Hörschaden geboren. Ein Hörscreening bei Neugeborenen liefert in 94% der Fälle ein richtiges positives Ergebnis und in 97,57% der Fälle ein richtiges negatives Ergebnis.

Sei H das Ereignis: Kind hat Hörschaden

Sei T das Ereignis: Test ist positiv

$P(H) = 0{,}003 \quad P(\overline{H}) = 0{,}997$

$P_H(T) = 0{,}94 \quad P_H(\overline{T}) = 0{,}06$

$P_{\overline{H}}(\overline{T}) = 0{,}9757 \quad P_{\overline{H}}(T) = 0{,}0243$

(a) Ein zufällig gewähltes Neugeborenes wird getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test ein positives Ergebnis liefert?

$$P(T) = P_H(T) \cdot P(H) + P_{\overline{H}}(T) \cdot P(\overline{H}) = 0{,}94 \cdot 0{,}003 + 0{,}0243 \cdot 0{,}997 = 0{,}0270471$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

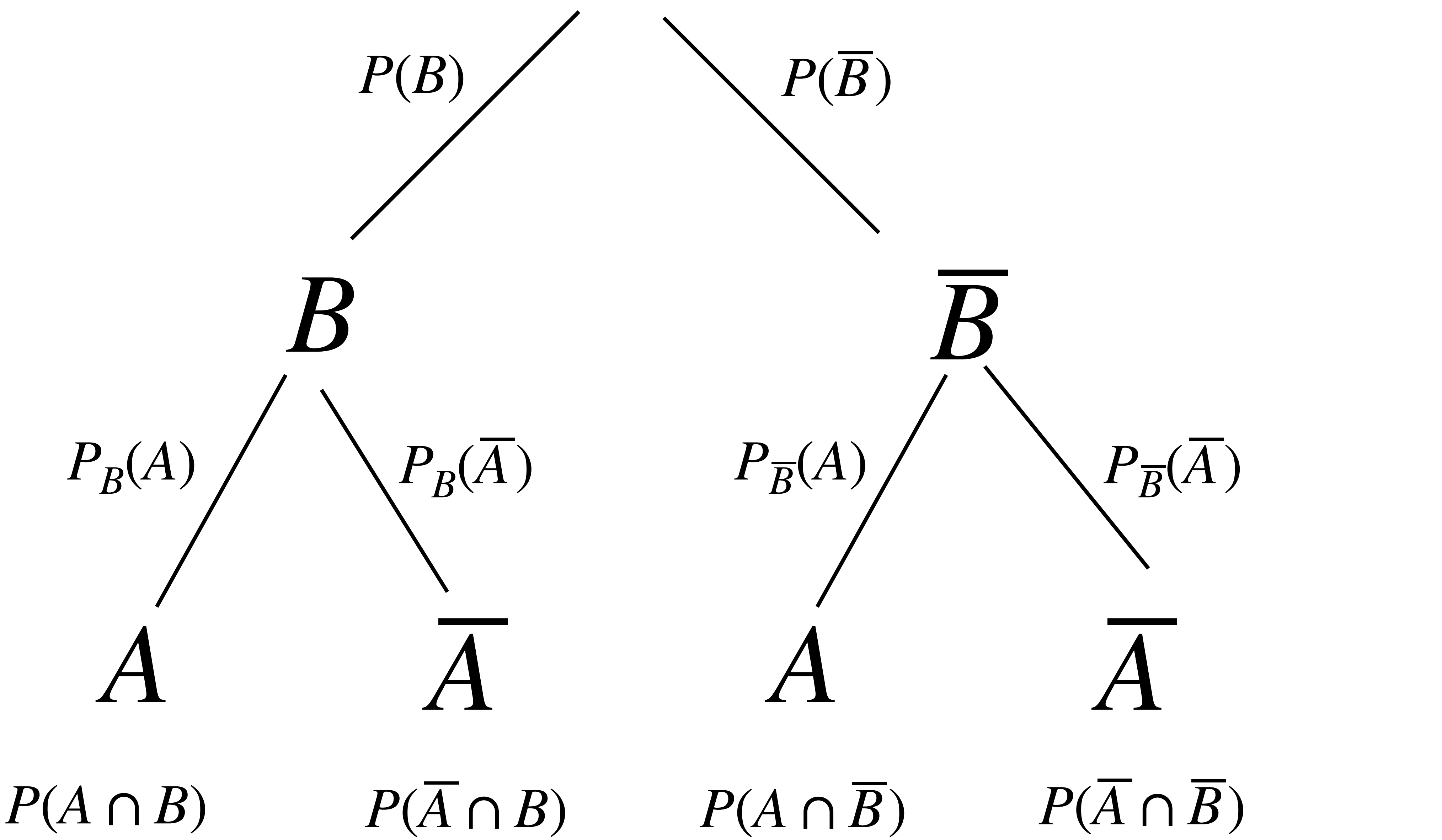
Satz 1.19 (Satz von Bayes). *Es sei* $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ *eine disjunkte Zerlegung mit* $P(B_k) > 0$ *für* $1 \leq k \leq n$. *Ist* $A \in \mathcal{A}$ *beliebig mit* $P(A) > 0$, *so gilt*

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}.$$

Ist $n = 2$, *so erhalten wir mit* $B_1 = B$ *und* $B_2 = \overline{B}$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)} \; .$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten



Daraus abzulesen: Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

Beispiel BW: Etwa 3 von 1000 Kindern werden mit einem Hörschaden geboren. Ein Hörscreening bei Neugeborenen liefert in 94% der Fälle ein richtiges positives Ergebnis und in 97,57% der Fälle ein richtiges negatives Ergebnis.

Sei H das Ereignis: Kind hat Hörschaden

Sei T das Ereignis: Test ist positiv

$P(H) = 0{,}003 \quad P(\overline{H}) = 0{,}997$

$P_H(T) = 0{,}94 \quad P_H(\overline{T}) = 0{,}06$

$P_{\overline{H}}(\overline{T}) = 0{,}9757 \quad P_{\overline{H}}(T) = 0{,}0243$

(b) Ein zufällig gewähltes Neugeborenes wird positiv getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind einen Hörschaden hat?

$$\begin{aligned} P_T(H) &= \frac{P(T \cap H)}{P(H) \cdot P_H(T) + P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(T)} \\ &= \frac{P(H) \cdot P_H(T)}{P(H) \cdot P_H(T) + P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(T)} \\ &= \frac{0{,}003 \cdot 0{,}94}{0{,}003 \cdot 0{,}94 + 0{,}997 \cdot 0{,}0243} = 0{,}1042\ldots \end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

Beispiel BW: Etwa 3 von 1000 Kindern werden mit einem Hörschaden geboren. Ein Hörscreening bei Neugeborenen liefert in 94% der Fälle ein richtiges positives Ergebnis und in 97,57% der Fälle ein richtiges negatives Ergebnis.

Sei H das Ereignis: Kind hat Hörschaden

Sei T das Ereignis: Test ist positiv

$P(H) = 0{,}003$ $\quad P(\overline{H}) = 0{,}997$

$P_H(T) = 0{,}94$ $\quad P_H(\overline{T}) = 0{,}06$

$P_{\overline{H}}(\overline{T}) = 0{,}9757$ $\quad P_{\overline{H}}(T) = 0{,}0243$

(c) Ein zufällig gewähltes Neugeborenes wird negativ getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind keinen Hörschaden hat?

$$P_{\overline{T}}(\overline{H}) = \frac{P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(\overline{T})}{P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(\overline{T}) + P(H) \cdot P_H(\overline{T})}$$

$$= \frac{0{,}997 \cdot 0{,}9757}{0{,}997 \cdot 0{,}9757 + 0{,}003 \cdot 0{,}06} = 0{,}9998\ldots$$