Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

Vorlesung 2

Grundlagen

Definition 1.2
Die Menge aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments bezeichnet man üblicherweise mit Ω. Diese Menge heißt Ergebnisraum.

Jedes $\omega \in \Omega$ heißt ein Elementarereignis.

Ein Ereignis ist eine Teilmenge von Ω.

Grundlagen

Eine Ereignisalgebra (oder $\sigma-$Algebra) $\mathscr{A}$ ist ein System von Teilmengen von Ω ($\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$), das gewisse Voraussetzungen erfüllt.

Definition 1.6

Es sei $\mathscr{A}$ eine Ereignisalgebra auf Ω. Eine Abbildung $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß oder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn P folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) $P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$ (σ-Additivität)

für höchstens abzählbar viele, paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathscr{A}$.

Das Trippel $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist Ω höchstens abzählbar, so heißt $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Laplace-Räume

Definition: Ist $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlichem Grundraum Ω und ist $P(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ gleich groß, so heißt $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein **Laplace-Raum**. Man nennt dann das Zufallsexperiment, das zu dem Ergebnisraum Ω führt, auch ein **Laplace-Experiment**.

In diesem Fall ist

$$P(\omega) := P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|},$$

wobei $|\Omega| = \#\Omega$ die Anzahl der Elemente von Ω bedeutet.

Kombinatorik

Definition: Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen. Das kartesische Produkt von $M_1, \ldots, M_n$ ist die Menge $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ aller geordneter Tupel

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

mit $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, ..., $a_n \in M_n$.

Satz K1: Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ endliche Mengen. Dann gilt

$$|M_1 \times \ldots \times M_n| = |M_1| \cdot \ldots \cdot |M_n|$$

Kombinatorik

Satz K2: Es sei ein n-schrittiges Verfahren zur Konstruktion von gewissen Objekten gegeben. Dabei gilt

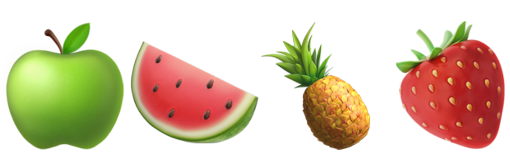
(1) Im i-ten Schritt gibt es immer k_i Möglichkeiten in der Konstruktion.

(2) Unterscheiden sich zwei Konstruktionsabläufe in mindestens einem Schritt, liefert das Verfahren unterschiedliche Objekte.

Dann können mit diesem Verfahren genau $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$ verschiedene Objekte konstruiert werden.

Wie viele Snacks aus einem Obst, einem Gebäck und einem Getränk können Sie sich aus den folgenden Zutaten zusammenstellen?

1.Schritt



2.Schritt

3.Schritt

Antwort: $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

Kombinatorik

Definition: Sei M eine endliche Menge, mit $|M| = n$. Eine Permutation (der Elemente) von M ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n\text{-mal}}$, in dem alle Einträge verschieden sind.
Die Menge aller Permutationen der Menge M, bezeichnen wir mit $\mathrm{Per}^*(M)$.

Eine Permutation der Menge {c,h,a,o,s} ist

(a,c,h,s,o)

Definition: Sei M eine endliche Menge, mit $|M| = n$, und sei $0 \leq r \leq n$. Eine $r-$Permutation (der Elemente) von M ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_r) \in \underbrace{M \times \ldots \times M}_{r\text{-mal}}$, in dem alle Einträge verschieden sind.
Die Menge aller $r-$Permutationen der Menge M, bezeichnen wir mit $\mathrm{Per}_r^*(M)$.

Kombinatorik

Urnen-Modell: In einer Urne sind n Kugeln unterschiedlicher Farbe. Wie viele Möglichkeiten gibt es r Kugeln herauszuziehen, wenn

(A) Die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge beachtet wird?
(B) Die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge nicht beachtet wird?
(C) Die Kugeln zurückgelegt werden und die Reihenfolge beachtet wird?
(D) Die Kugeln zurückgelegt werden und die Reihenfolge nicht beachtet wird?

Antworten:

(A) $n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-r+1)$
(B) ???
(C) n^r
(D) ???

Kombinatorik

Eine Auswahl von r Kugeln ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge entspricht der Auswahl einer r-elementigen Teilmenge. Von diesen gibt es genau $\binom{n}{r}$ viele.

Es ist $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$.

Kombinatorik

Urnen-Modell: In einer Urne sind n Kugeln unterschiedlicher Farbe. Wie viele Möglichkeiten gibt es r Kugeln herauszuziehen, wenn

(A) Die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge beachtet wird?
(B) Die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge nicht beachtet wird?
(C) Die Kugeln zurückgelegt werden und die Reihenfolge beachtet wird?
(D) Die Kugeln zurückgelegt werden und die Reihenfolge nicht beachtet wird?

Antworten:

(A) $n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-r+1)$

(B) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

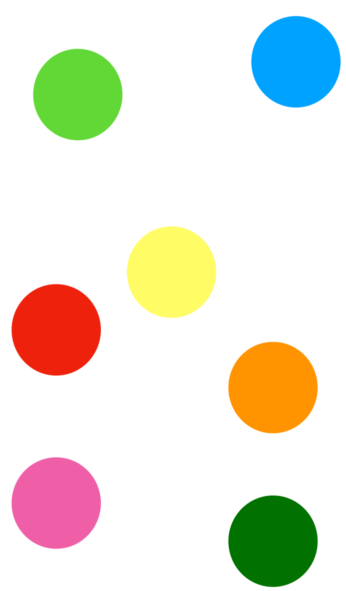
(C) n^r

(D) ???

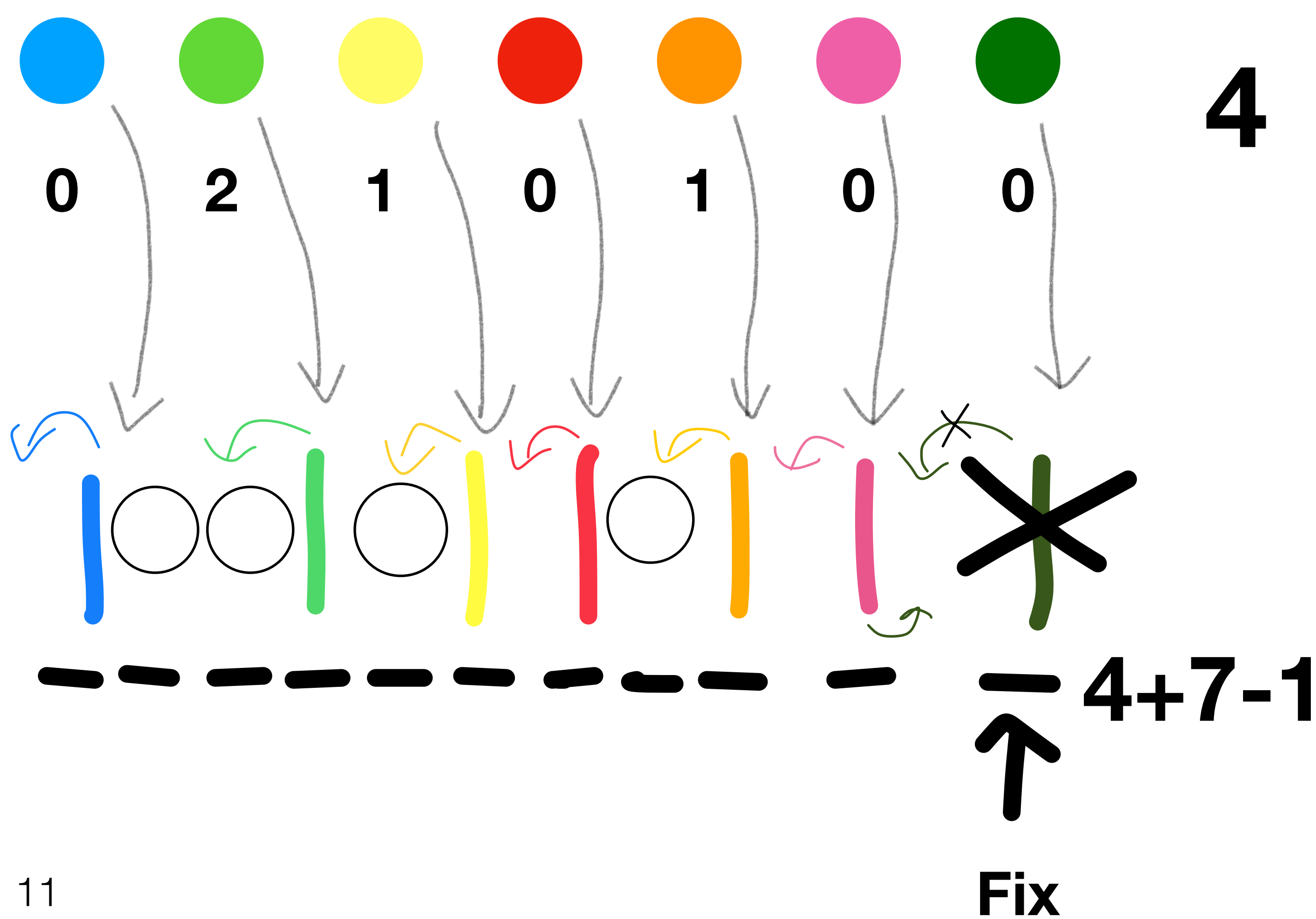
Kombinatorik

Eine Auswahl von r Kugeln mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge entspricht der Überlegung, wie oft wir nach r-mal Ziehen eine blaue, wie oft eine rote, …. Kugel gezogen haben.

Urne mit 7 Kugeln



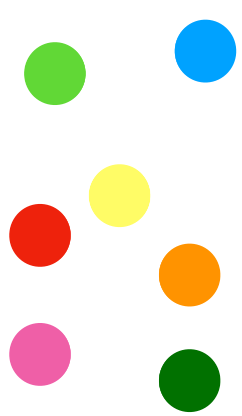
Wir ziehen 4 mal



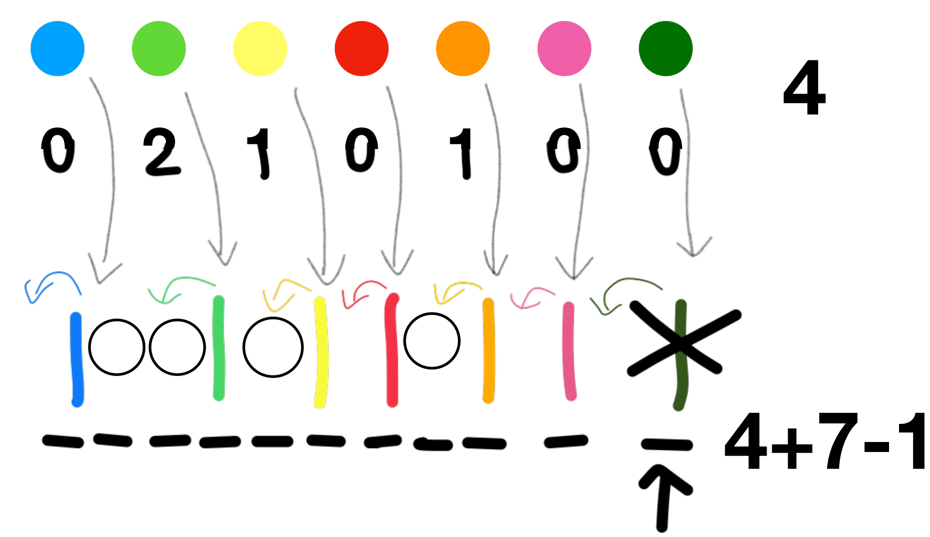
Kombinatorik

Eine Auswahl von r Kugeln mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge entspricht der Überlegung, wie oft wir nach r-mal Ziehen eine blaue, wie oft eine rote, …. Kugel gezogen haben.

Urne mit 7 Kugeln



Wir ziehen 4 mal



Wir müssen nur sechs von den 10 Plätzen auswählen, wo die farbige Teilstriche stehen werden (oder 4 Plätze, wo die Bälle stehen werden) !

Das ergibt $\binom{4+7-1}{7-1} = \binom{4+7-1}{4}$ Möglichkeiten.

Kombinatorik

Urnen-Modell: In einer Urne sind n Kugeln unterschiedlicher Farbe. Wie viele Möglichkeiten gibt es r Kugeln herauszuziehen, wenn

(A) Die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge beachtet wird?

(B) Die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge nicht beachtet wird?

(C) Die Kugeln zurückgelegt werden und die Reihenfolge beachtet wird?

(D) Die Kugeln zurückgelegt werden und die Reihenfolge nicht beachtet wird?

Antworten:

(A) $n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-r+1)$

(B) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

(C) n^r

(D) $\binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!} = \binom{n+r-1}{r}$

Kombinatorik

Definition: Seien $r, n \in \mathbb{N}$, mit $r \leq n$. Eine r-Kombination von $\{1,\ldots,n\}$ ohne Wiederholung ist ein Element aus

$$\mathrm{Kom}_r^*(n) = \{(a_1, \ldots, a_r) \in \{1,\ldots,n\}^r \,|\, a_1 < a_2 < \ldots < a_r\}.$$

Eine r-Kombination von $\{1,\ldots,n\}$ mit Wiederholung ist ein Element aus

$$\mathrm{Kom}_r(n) = \{(a_1, \ldots, a_r) \in \{1,\ldots,n\}^r \,|\, a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r\}.$$

Es gilt:

$$|\mathrm{Kom}_r^*(n)| = \binom{n}{r}$$

$$|\mathrm{Kom}_r(n)| = \binom{n+r-1}{n-1}$$