Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

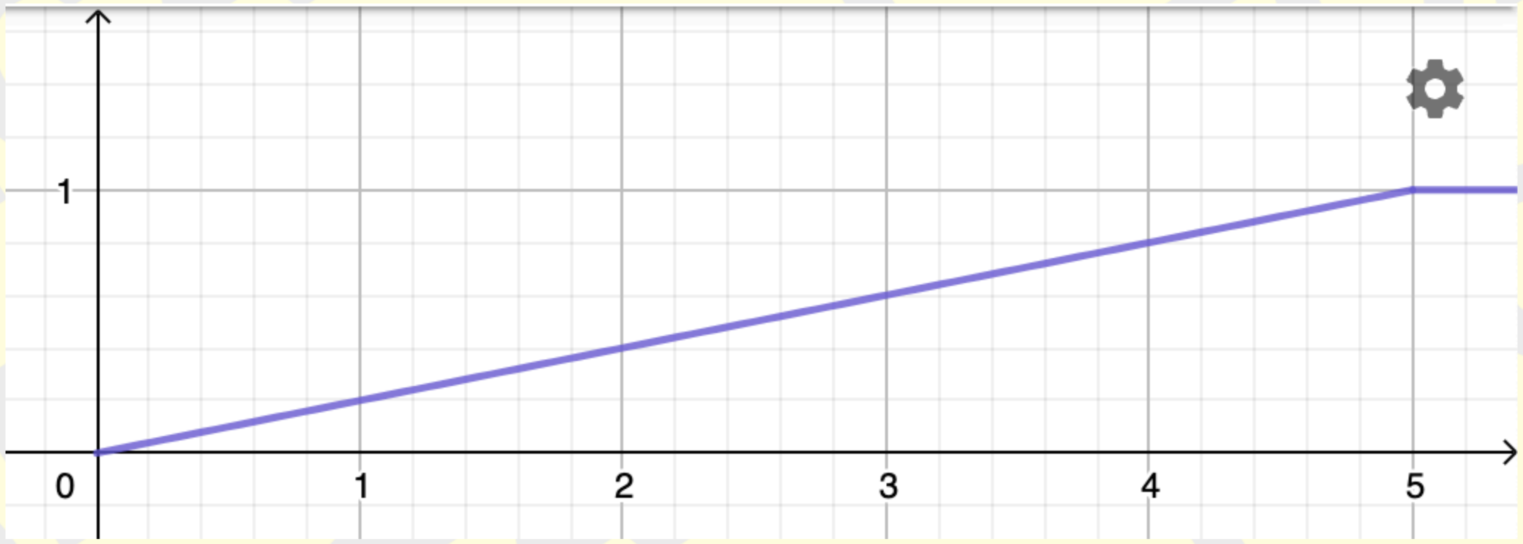
Vorlesung 10

Stetige Zufallsvariablen

Frage SZV: **Ihr Bus kommt alle 5 Minuten (und wir gehen davon aus, dass das tatsächlich stimmt). Sie gehen ohne auf die Uhr zu gucken zur Haltestelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 2 Minuten warten müssen?**

Wenn wir jede mögliche Dauer messen: $\Omega = (0{,}5]$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = 0$

$$x \mapsto P(X \leq x) = F(x)$$



Im diskreten Fall: $F_Y(k) = P(Y \leq k) = \sum_{y \leq k} P(Y = y)$

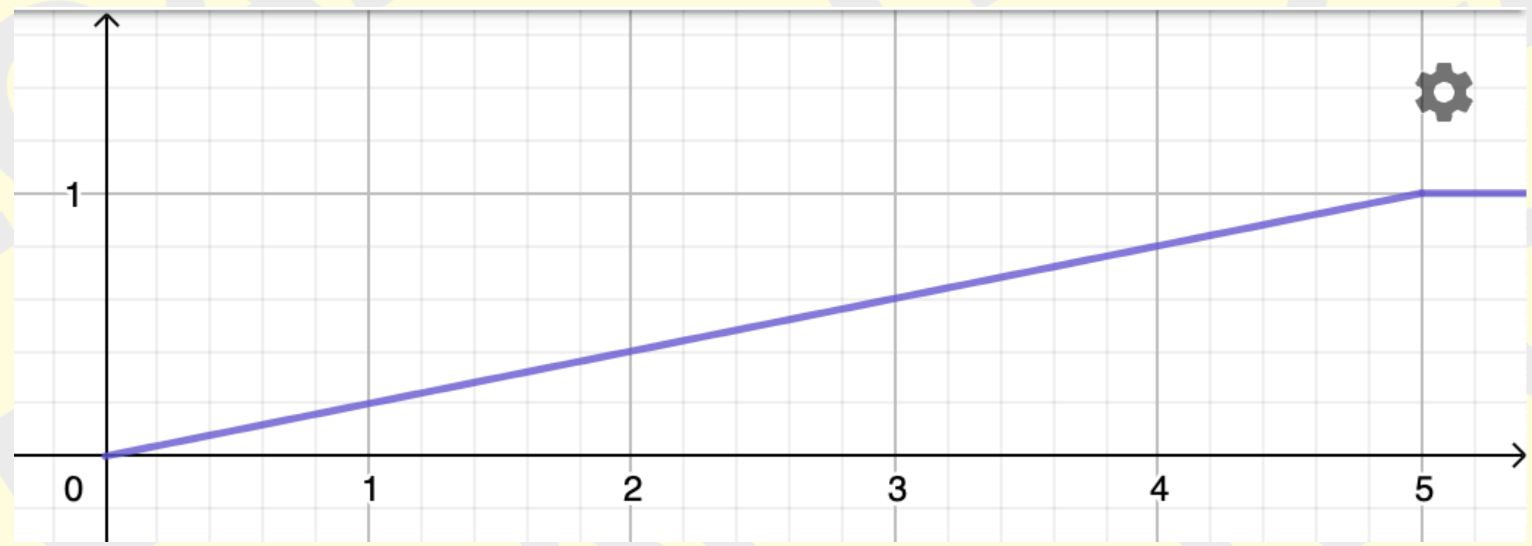
Hier: $F_X(k) = P(X \leq k) = \int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx$, **mit** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{falls } x \in [0{,}5] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Stetige Zufallsvariablen

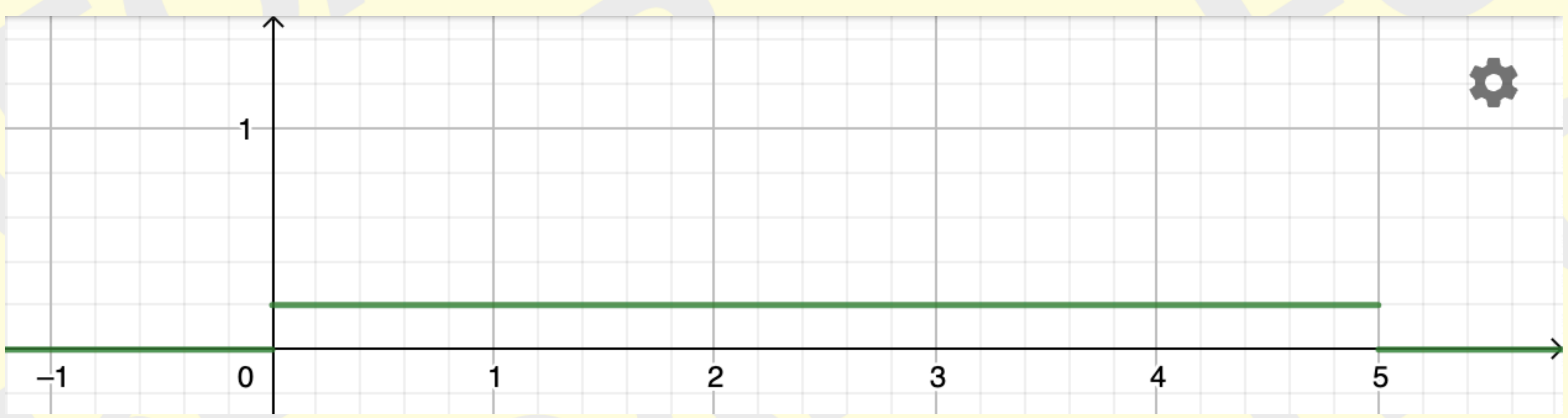
Frage SZV: Ihr Bus kommt alle 5 Minuten (und wir gehen davon aus, dass das tatsächlich stimmt). Sie gehen ohne auf die Uhr zu gucken zur Haltestelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 2 Minuten warten müssen?

Wenn wir jede mögliche Dauer messen: $\Omega = (0{,}5]$, $X(\omega) = \omega$, $P(\omega) = 0$

$$x \mapsto P(X \leq x) = F(x)$$



Hier: $F_X(k) = P(X \leq k) = \int_{-\infty}^{k} f(x)\, dx$, **mit**



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \textbf{falls } x \in [0{,}5] \\ 0 & \textbf{sonst} \end{cases}$$

WICHTIG: $f(x) \neq P(X = x)$

Stetige Zufallsvariablen

Definition 3.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *stetige Zufallsvariable*, falls es eine integrierbare, nicht negative reelle Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

gibt mit der Eigenschaft

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

$$\boxed{\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1}$$

Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{array}$$

heißt *Verteilungsfunktion* von X, die Funktion f heißt *Dichte* der Zufallsvariablen X.

Falls f im Punkt x stetig ist, gilt $F'(x) = f(x)$.

Stetige Zufallsvariablen

Satz 3.2. *Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und Dichte f, so gilt:*

(a) *Ist $x < y$, so gilt $F(x) \leq F(y)$.*

(b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Satz 3.3. *Ist F die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen X mit Dichte f, so gilt für alle reellen Zahlen $a < b$:*

(a) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

(b) $P(X > a) = 1 - F(a) = \int_a^\infty f(t)dt$.

Definition 3.5. Zwei stetige Zufallsvariable X und Y heißen *unabhängig*, wenn die Ereignisse $(X \leq x)$ und $(Y \leq y)$ für beliebige $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ unabhängig sind, d.h. wenn

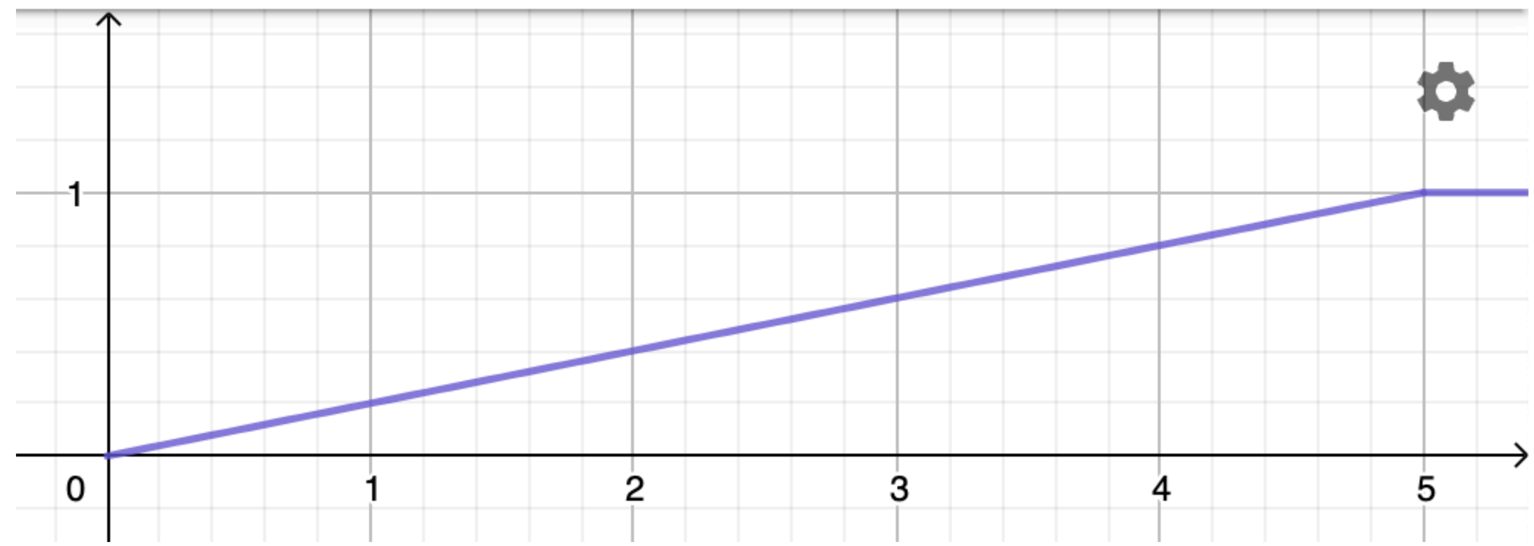
$$P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

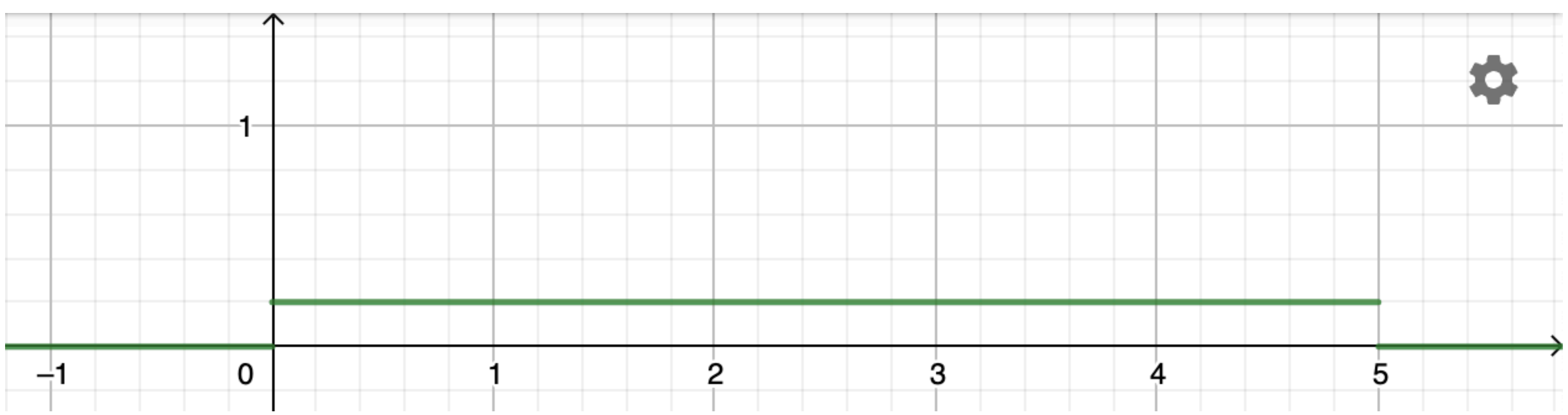
gilt. Sonst heißen X und Y *abhängig*.

Stetige Zufallsvariablen

Frage SZV2: **Ihr Bus kommt alle 5 Minuten (und wir gehen davon aus, dass das tatsächlich stimmt). Sie gehen ohne auf die Uhr zu gucken zur Haltestelle. Wie lange dauert die erwartete Wartezeit?**

$$x \mapsto P(X \leq x) = F(x)$$





$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \textbf{falls } x \in [0,5] \\ 0 & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Erwartungswert?

Diskret: $\sum_{x \in X((\Omega)} xP(X = x)$

Stetig: $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$

Hier: $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = 2{,}5$

Stetige Zufallsvariablen

Definition 3.6. (a) Ist X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion f, so heißt

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

der *Erwartungswert* von X.

(b) Ist X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion f derart, dass $E(X^2)$ existiert, so definiert man die *Varianz* durch

$$Var(X) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx.$$

$\sigma = \sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ heißt *Standardabweichung* von X.

Alles was Sie über $E(X)$ und $Var(X)$ wissen wenn X diskret ist, gilt auch wenn X stetig ist!

$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$, **Tschebyscheff, ...**

Exponentialverteilung

Poisson-Experiment:
Ereignisse treten selten auf
Ereignisse treten unabhängig von einander auf

Messen wir die Wahrscheinlichkeit für Wartezeiten in einem Poisson-Experiment mit Parameter λ, dann nutzen wir die Exponentialverteilung mit Parameter λ:

Verteilfunktion: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \textbf{für } x \geq 0 \\ 0 & \textbf{sonst} \end{cases}$

Dichtefunktion: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \textbf{für } x \geq 0 \\ 0 & \textbf{sonst} \end{cases}$

Erwartungswert: $\dfrac{1}{\lambda}$

Varianz: $\dfrac{1}{\lambda^2}$

Exponentialverteilung

Beispiel EV: **In einer Firma, fallen pro Tag $\frac{1}{200}$ der elektronischen Geräte aus — und zwar unabhängig von ihrem Alter.**

Die Ausfälle passieren unabhängig voneinander und sind selten

$\rightarrow$ **Poisson-verteilt mit $\lambda = \frac{1}{200}$.**

Was erwarten wir für die Lebensdauer eines elektronischen Gerätes?

Poisson + Wartezeit = Exponentialverteilung!

Also: $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 200$ **Tage**

Wie groß ist der Anteil der Geräte, die höchstens 20 Tage halten?

$$P(X \leq 20) = F(20) = 1 - e^{-\frac{20}{200}} = 0{,}0982...$$

Wie groß ist der Anteil der Geräte, die mindestens 180 Tage halten?

$$P(X \geq 180) = 1 - P(X \leq 180) = 1 - F(180) = 1 - (1 - e^{-\frac{180}{200}}) = 0{,}4065...$$