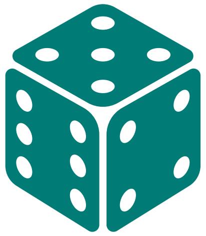
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik



Woche 1

Dozentin:

Dr. Claudia Gotzes
(Vertretung für: Dr. Katarina Bellova)
Mail: claudia.gotzes@uni-due.de
Sprechstunde: nach Vereinbarung
Büro: BC514

Vorlesung:

Mittwochs: 12:15 - 13:45
Raum: SG 135

Moodle-Kurs:

Einschreibeschlüssel: bayes

Übungsleiter:

Name: Dr. Rene Simon
Mail: rene.simon@uni-due.de

Moodle-Kurs:

Einschreibeschlüssel: bayes

Übungen:

Donnerstags: 16:15 - 17:00
17:00 - 17:45
Raum: MC 122

Suchen Sie sich einfach eine Übung aus.
Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.

Abgabe in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht!

Übungszettel zum Vorlesungsstoff: jeden Donnerstag
Abgabe Ihrer Lösungen: bis nächsten Donnerstag über Moodle

Die Bearbeitung (und Abgabe) der Aufgaben wird dringend empfohlen.
Neben besserem Verständnis des Vorlesungsstoffes bietet sie Ihnen eine gute Vorbereitung auf die Klausur!

Weiterer kleiner Anreiz: Bonus-Punkte für die Klausur (Details: Moodle)

Moodle-Kurs:

Einschreibeschlüssel: bayes

Tutorien:

Montags:	10:15 - 11:45 in Raum LK052
	12:15 - 13:45 in Raum LD102
Mittwochs:	14:15 - 15:45 in Raum LE 102
	16:15 - 17:45 in Raum LK052
Donnerstags:	14:15 - 15:45 in Raum LA013
Freitags:	12:15 - 13:45 in Raum LE105

Moodle-Kurs:

Einschreibeschlüssel: bayes

Vorlesung

Neue Themen werden besprochen.

Übung

Die Übungszettel werden besprochen.

Tutorium

Viel Platz für Fragen.
Weitere Beispiele werden unter Anleitung gerechnet.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Beispiel (Würfeln):
``Die Wahrscheinlichkeit, mit einem (nicht gezinkten) Würfel eine 5 zu Würfeln, beträgt 1/6.´´

Beispiel (``Ziegenproblem´´):
- 3 geschlossene Türen
- Hinter 1 Tür ein Auto, hinter den beiden anderen Türen Ziege
- 1 Tür auswählen
- Von den restlichen Türen eine geöffnet: Ziege
- Soll man die Auswahl der Tür wechseln?

Statistik

Beispiel (Würfeln):

``Ist der Würfel gezinkt?´´

Hypothese: Der Würfel ist nicht gezinkt

Experiment: 100 Mal würfeln:

Zahl	1	2	3	4	5	6
# Würfe	15	16	18	17	16	18

(Statistische) Antwort: Mit …-Wahrscheinlichkeit ist der Würfel nicht gezinkt.

Statistik

Beispiel (Klausurergebnisse WT, WiSe 2023/24):

	Alle Teilnehmenden	Teilnehmende mit 5 Bonuspunkten ($\geq 60\,\%$ Übungsaufgaben)	Teilnehmende mit 1 bis 4 Bonuspunkten ($20\,\%$ bis $60\,\%$)	Teilnehmende ohne Bonuspunkte ($< 20\,\%$)
Bestehensquote	60 %	88 %	59 %	41 %

Machen Sie die Übungsblätter!

Statistik

Anwendungsgebiete:

- **Medizin:** Wirksamkeit von Medikamenten
  Ausbreitung von Epidemien
- **Verkehrswesen:** Überbuchung von Flugzeugen
- **Versicherungswesen:** Kalkulation von Prämien
- **Meinungsforschung:** Hochrechnung aufgrund Stichproben
- **Informatik:** Analyse von Algorithmen oder Netzwerken
- …

Grundlagen

Definition 1.1. Wir nennen einen Vorgang ein *(ideales) Zufallsexperiment*, wenn folgende Gegebenheiten vorliegen:

1. Das Experiment wird unter genau festgelegten *Versuchsbedingungen* durchgeführt, z.B. mit denselben Würfeln auf einem bestimmten Tisch.
2. Das Experiment hat verschiedene mögliche *Ergebnisse*,
    - die alle vor der Durchführung bekannt sind und
    - von denen jeweils genau eines eintritt.
3. Das Experiment ist nicht *determiniert*, d.h. dass vor Beendigung des Experiments das Ergebnis ungewiss ist.
4. Das Experiment ist (zumindest in der Vorstellung) beliebig oft unter den gleichen Bedingungen durchzuführen.

Grundlagen

Definition 1.2

Die Menge aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments bezeichnet man üblicherweise mit Ω. Diese Menge heißt Ergebnisraum.

Jedes $\omega \in \Omega$ heißt ein Elementarereignis.

Ein Ereignis ist eine Teilmenge von Ω.

Definition 1.3

Ein System $\mathscr{A}$ von Teilmengen von Ω heißt eine Ereignisalgebra (oder $\sigma-$Algebra), wenn gilt:

(i) Ist $A \in \mathscr{A}$, so ist auch $\overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathscr{A}$.

(ii) Es ist stets $\Omega \in \mathscr{A}$.

(iii) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$, so ist auch $\bigcup_k A_k \in \mathscr{A}$. Dabei kann die Vereinigung endlich oder abzählbar unendlich sein.

Mengen

Verknüpfung von Aussagen:

Seien A und B Aussagen.

- $A \wedge B$: A UND B sind wahr.
- $A \vee B$: A ODER B ist wahr.

Verknüpfung von Mengen:

Seien M und N Teilmengen einer Menge $\mathscr{U}$:

- $M \cup N = \{x \in \mathscr{U} \,|\, x \in M \vee x \in N\}$ (Vereinigung)
- $M \cap N = \{x \in \mathscr{U} \,|\, x \in M \wedge x \in N\}$ (Durchschnitt / Schnitt)
- $M \backslash N = \{x \in \mathscr{U} \,|\, x \in M \wedge x \notin N\}$ (Differenz)
- $M^{\mathscr{C}_{\mathscr{U}}} = M^{\mathscr{C}} = \overline{M} = \mathscr{U} \backslash M = \{x \in \mathscr{U} \,|\, x \notin M\}$ (Komplement)
- $\mathfrak{P}(M) = \{T \subseteq \mathscr{U} \,|\, T \subseteq M\}$ (Potenzmenge)

Grundlagen

Definition 1.6

Es sei $\mathscr{A}$ eine Ereignisalgebra auf Ω. Eine Abbildung $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß oder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn P folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) $$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$ (σ-Additivität)

für höchstens abzählbar viele, paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathscr{A}$.

Das Trippel $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist Ω höchstens abzählbar, so heißt $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Mengen

Proposition: Seien M, N und L Teilmengen der Menge $\mathscr{U}$.

(a) $M \backslash M = \emptyset$ und $M \backslash \emptyset = M$

(b) $M \backslash N = M \backslash (M \cap N)$

(c) $M \cap M = M$ und $M \cup M = M$

(d) $M \cap N = N \cap M$ und $M \cup N = N \cup M$

(e) $[M \cap N = M \Leftrightarrow M \subseteq N]$ und $[M \cup N = M \Leftrightarrow N \subseteq M]$

(f) $\overline{(M \cap N)} = \overline{M} \cup \overline{N}$ und $\overline{(M \cup N)} = \overline{M} \cap \overline{N}$

(g) $\overline{\left(\overline{M}\right)} = M$

(h) $M \subseteq N \Rightarrow \overline{N} \subseteq \overline{M}$

(i) $M \cap (N \cap L) = (M \cap N) \cap L$ und $M \cup (N \cup L) = (M \cup N) \cup L$

(j) $M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$ und
$M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$

Grundlagen

Satz 1.7. *Seien* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. *Dann gilt:*

(1) $P(\emptyset) = 0$ *und* $0 \leq P(A) \leq 1$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$.

(2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(3) $A \subset B \;\Rightarrow\; P(A) \leq P(B)$, *i.e. p ist monoton.*

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{\leq}{=} P(A) + P(B)$.

(5) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

(6) $A \subset B \;\Rightarrow\; P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

... ...

Grundlagen

(7) (Siebformel von Sylvester-Poincare)

$$
\begin{aligned}
P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) \\
&\pm \cdots + (-1)^{n-2} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-1}\le n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{n-1}}) \\
&+(-1)^{n-1}\, P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).
\end{aligned}
$$

Das ist die Verallgemeinerung von *(4)* und wird auch Inklusions-Exklusions-Formel genannt.

Laplace-Räume

Definition 1.8: Ist $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlichem Grundraum Ω und ist $P(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ gleich groß, so heißt $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Laplace-Raum.
Man nennt dann das Zufallsexperiment, das zu dem Ergebnisraum Ω führt, auch ein Laplace-Experiment.

In diesem Fall ist

$$P(\omega) := P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|},$$

wobei $|\Omega| = \#\Omega$ die Anzahl der Elemente von Ω bedeutet.