Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik
Blatt 13

Aufgabe 1

1. In einem Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p treten vor dem r-ten Erfolg genau k Misserfolge auf. Berechne den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}$ für die Erfolgswahrscheinlichkeit p.

2. Sei X Poisson-verteilt mit unbekanntem Parameter λ. Dieser soll anhand einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 3$ geschätzt werden. (Alle X_i haben die gleiche Verteilung wie X und sind stochastisch unabhängig.)

   Seien
   $$\hat{\lambda}_1 := \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} iX_i, \quad \hat{\lambda}_2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\lambda}_3 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\lambda}_2)^2$$
   drei Schätzfunktionen.

   a) Zeigen Sie, dass $\hat{\lambda}_2$ und $\hat{\lambda}_3$ erwartungstreu sind.

   b) Zeigen Sie, dass $\hat{\lambda}_1$ nicht erwartungstreu ist und nutzen Sie den Nachweis, um daraus eine erwartungstreue Schätzfunktion zu bestimmen.

Aufgabe 2

1. In einer Urne befinden sich k Kugeln durchnummeriert von 1 bis k. Nun wird eine Kugel zufällig gezogen (wobei die Wahrscheinlichkeit für alle Kugeln gleich sei). Die Zufallsvariable X sei die Nummer der gezogenen Kugel.

   Durch n-malige Wiederholung (Stichprobe $X_1, , \ldots, X_n$) soll die Anzahl k der Kugeln geschätzt werden.

   a) Leiten Sie Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{k} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ her.

   b) Berechnen Sie $\mu = E(X)$.

   c) Bestimmen Sie nun einen erwartungstreuen Schätzer $\hat{k}_2$.

2. Seien $X_1, \ldots, X_n$ wie im Teil 1, mit unbekanntem $k \in \mathbb{N}$. Sei $\hat{k} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ wie vorher. Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für k der Form $[\hat{k}, C\hat{k}]$ mit einer Konstanten $C > 0$. Das Konfidenzniveau sei dabei $1 - \alpha$.

   Tipp: Zeigen und benutzen Sie $P(X_i < x) \leq \frac{x}{k}$.