Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik

Schnelldurchlauf

TEIL 1

Grundlagen

Satz 1.7. *Seien* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. *Dann gilt:*

(1) $P(\emptyset) = 0$ *und* $0 \leq P(A) \leq 1$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$.

(2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(3) $A \subset B \;\Rightarrow\; P(A) \leq P(B)$, *i.e.* p *ist monoton.*

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{\leq}{=} P(A) + P(B)$.

(5) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

(6) $A \subset B \;\Rightarrow\; P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

… …

Grundlagen

(7) (Siebformel von Sylvester-Poincare)

$$
\begin{aligned}
P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) \\
&\pm \cdots + (-1)^{n-2} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-1}\le n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{n-1}}) \\
&+(-1)^{n-1}\, P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).
\end{aligned}
$$

Das ist die Verallgemeinerung von *(4)* und wird auch Inklusions-Exklusions-Formel genannt.

Aufgabe 1

Ein Würfel wurde so verändert, dass die Wahrscheinlichkeit mit ihm eine bestimmte Augenzahl zu werfen, proportional zu dieser Zahl ist.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
    a) A: "Eine gerade Augenzahl wird gewürfelt."
    b) B: "Die gewürfelte Augenzahl ist keine Primzahl."
    c) C: "Eine ungerade Augenzahl wird gewürfelt."
    d) D: "Die gewürfelte Augenzahl ist kleiner als 4."
3. Berechnen Sie $P(A \cup B)$, $P(B \cap C)$, $P(C \cap \overline{D})$.

Kombinatorik

Urnen-Modell: In einer Urne sind n Kugeln unterschiedlicher Farbe. Wie viele Möglichkeiten gibt es r Kugeln herauszuziehen, wenn

(A) Die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge beachtet wird?

(B) Die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge nicht beachtet wird?

(C) Die Kugeln zurückgelegt werden und die Reihenfolge beachtet wird?

(D) Die Kugeln zurückgelegt werden und die Reihenfolge nicht beachtet wird?

Antworten:

(A) $n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-r+1)$

(B) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

(C) n^r

(D) $\binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!} = \binom{n+r-1}{r}$

Kombinatorik

Urnen-Modell

Von n Kugeln werden r gezogen	**Mit Zurücklegen**	**Ohne Zurücklegen**
Mit Beachtung der Reihenfolge	n^r	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$
Ohne Beachtung der Reihenfolge	$\dbinom{n+r-1}{r}$	$\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

Kombinatorik

Anagramme

Wie viele Anordnungen der Buchstaben VIELERFOLG gibt es?

$$\frac{10!}{2!2!}$$

Kombinatorik

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Auf wieviele Arten kann man hier das Wort COMPUTER lesen?

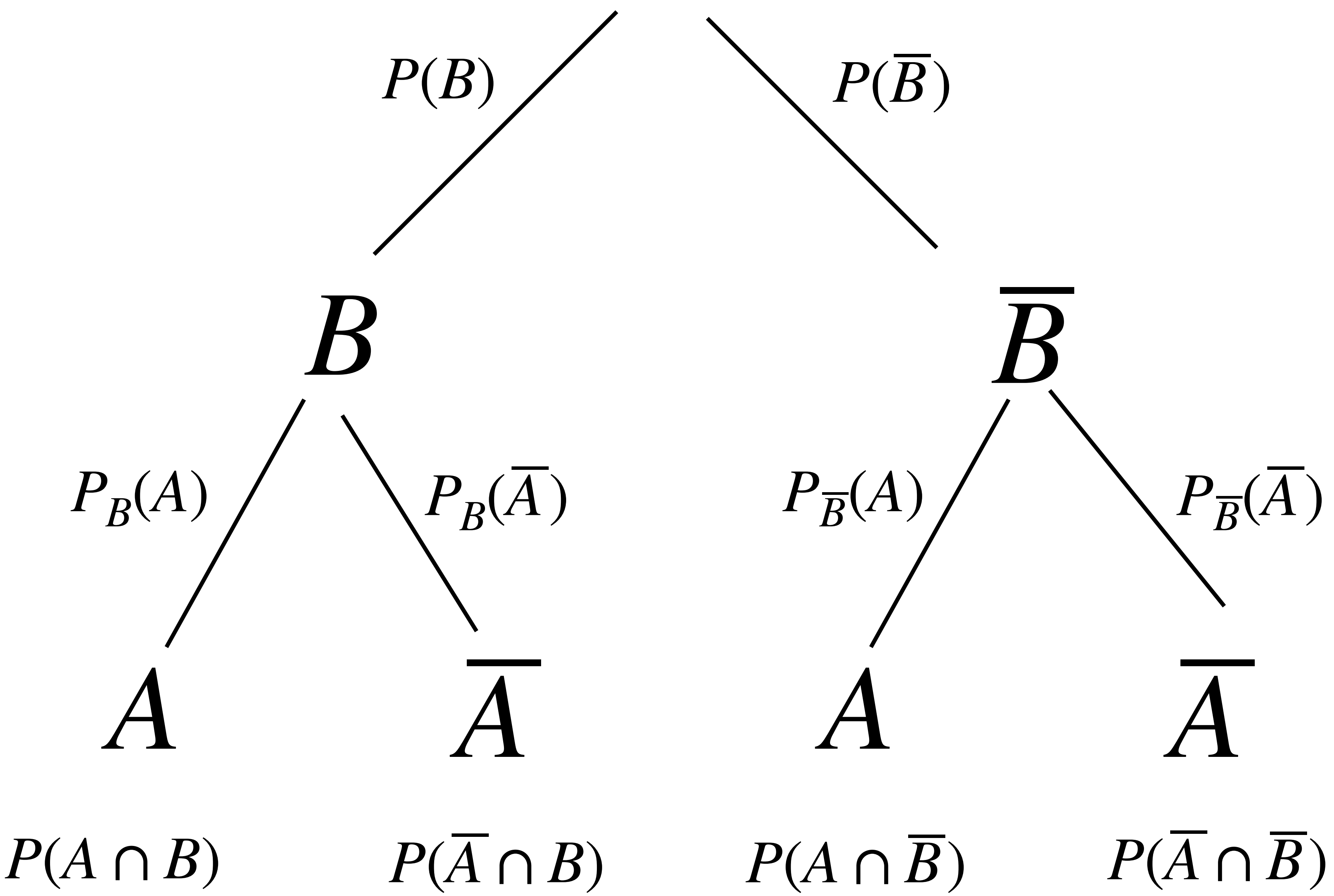
$$\binom{7}{3}$$

C	O	M	P	U
O	M	P	U	T
M	P	U	T	E
P	U	T	E	R

Baumdiagramme

W'keit eines Pfades: Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Teilstrecken

W'keit mehrerer Pfade: Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade



Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 1.15. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sind A und B zwei Ereignisse, d.h. $A, B \in \mathcal{A}$, mit $P(B) > 0$, so ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $P(A|B) = P_B(A)$ ("Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B") definiert durch

$$P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Folgerung 1.18. Es sei $B \in \mathcal{A}$ mit $0 < P(B) < 1$, d.h. auch $0 < P(\overline{B}) < 1$. Dann ist für beliebiges $A \in \mathcal{A}$:

$$P(A) = P_B(A) \cdot P(B) + P_{\overline{B}}(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Folgt aus dem Baumdiagramm

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz 1.19 (Satz von Bayes). *Es sei* $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ *eine disjunkte Zerlegung mit* $P(B_k) > 0$ *für* $1 \leq k \leq n$. *Ist* $A \in \mathcal{A}$ *beliebig mit* $P(A) > 0$, *so gilt*

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}.$$

Ist $n = 2$, *so erhalten wir mit* $B_1 = B$ *und* $B_2 = \overline{B}$:

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}}\ .$$

Folgt aus dem Baumdiagramm

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Aufgabe 1

Ein Prüfverfahren habe folgende Eigenschaft. Es zeigt mit Wahrscheinlichkeit 0.95 einen Fehler an, wenn das geprüfte Teil fehlerhaft ist, und keinen Fehler mit Wahrscheinlichkeit 0.9, wenn das Teil fehlerfrei ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil fehlerhaft ist, beträgt 0.04. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil

1. fehlerhaft ist, wenn ein Fehler angezeigt wird,
2. fehlerfrei ist, wenn kein Fehler angezeigt wird?

Unabhängigkeit

Definition 1.21. (i) Zwei Ereignisse A und B heißen *(stochastisch) unabhängig*, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B);$$

andernfalls heißen sie *abhängig*. n Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ (mit $n \geq 2$) heißen *(stochastisch) unabhängig*, falls für alle mindestens zweielementigen Teilmengen $T \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$P\left(\bigcap_{j \in T} A_j\right) = \prod_{j \in T} P(A_j)\ .$$

(ii) Eine Familie von Ereignissen $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{A}$ heißt *paarweise (stochastisch) unabhängig*, falls

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad \forall i, j \in I, i \neq j.$$

Lemma: Sind A und B Ereignisse mit $P(B) > 0$, so gilt

$$A \text{ und } B \text{ sind unabhängig} \iff P_B(A) = P(A)$$

TEIL 2

Zufallsvariablen X

Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist diskret $\Longleftrightarrow$ $X(\Omega)$ ist abzählbar

Definition 3.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *stetige Zufallsvariable*, falls es eine integrierbare, nicht negative reelle Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1}$$

gibt mit der Eigenschaft

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{array}$$

heißt *Verteilungsfunktion* von X, die Funktion f heißt *Dichte* der Zufallsvariablen X.

$$f(x) = F'(x)$$

Zufallsvariablen X

X **diskret**	X **stetig** (**mit Dichte** f)
$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$	$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$ $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$
$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$
$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$	$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$
X, Y **unabhängig** $\Longleftrightarrow$ $(X = x)$ **und** $(Y = y)$ **unabhängig für alle** $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$	X, Y **unabhängig** $\Longleftrightarrow$ $(X \leq x)$ **und** $(Y \leq y)$ **unabhängig für alle** $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Zufallsvariablen X

Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

NUR wenn X und Y unabhängig sind: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Beispielaufgabe

Fünf Personen haben Ihre Jacken an einer Garderobe abgegeben. Später werden die Jacken zufällig an die fünf Personen herausgegeben. Was erwarten wir für die Anzahl von Personen, die Ihre eigene Jacke bekommen haben?

Zufallsvariablen X

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable, von der lediglich die Verteilungsfunktion:

$$F_Y : \mathbb{R} \to [0,1], \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 0,4 & 0 \leq x < 1, \\ 0,6 & 1 \leq x < 2, \\ 0,81 & 2 \leq x < 3, \\ 0,81 & 3 \leq x < 4, \\ 0,95 & 4 \leq x < 5, \\ 1 & 5 \leq x, \end{cases}$$

bekannt ist.

Bestimmen Sie die Verteilung V_Y der Zufallsvariablen Y.

Aufgabe 1

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ a(1-(x-2)^2) & 1 < x \leq 3 \\ b & \text{sonst} \end{cases} .$$

1. Bestimmen Sie die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Geben Sie die Verteilungsfunktion F_X der Zufallsvariablen X an.
3. Berechnen Sie $P(0 \leq X \leq 2)$.
4. Bestimmen Sie $E(X)$.

Binomialverteilung

Bernoulli-Experiment: $(\{0,1\}, P)$**, mit** $P(1) = p$ **und** $P(0) = 1 - p$**.**

Binomialverteilung X **mit Parametern** n **und** p **zählt wie oft das Ereignis** 1 **eintritt, wenn wir das Bernoulli-Experiment** n**-mal unabhängig wiederholen.**

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ für } k \in \{0, \ldots, n\}$$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

Beispiel: Aus einer Urne mit genau 30 **Kugeln, nämlich** 12 **weißen und** 18 **roten werden (blind) nacheinander und mit Zurücklegen genau** 50 **Kugeln entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau** 20 **weiße Kugeln gezogen wurden?**

Binomialverteilung

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Eine Maschine stellt Produkte her. Man weiß, dass 5% der Produkte fehlerhaft sind. Die Produkte werden in Kisten mit je 100 Produkten verpackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Kiste genau 6 fehlerhafte Produkte sind?

Geometrische Verteilung

Bernoulli-Experiment: $(\{0,1\}, P)$**, mit** $P(1) = p$ **und** $P(0) = 1 - p$**.**

Geometrische Verteilung X **mit Parameter** p **zählt die** 0**en bevor die erste** 1 **eintritt, wenn wir das Bernoulli-Experiment unabhängig wiederholen.**

$$P(X = k) = (1-p)^k p, \text{ für } k \in \mathbb{N}_0$$

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Beispiel: Aus einer Urne mit genau 30 **Kugeln, nämlich** 12 **weißen und** 18 **roten werden (blind) nacheinander und mit Zurücklegen Kugeln entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst** 5 **weiße Kugeln und dann eine rote Kugel gezogen wird?**

Geometrische Verteilung

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Aufgabe 2

Es wird solange gewürfelt, bis jede der Zahlen 1 bis 6 mindestens einmal erschienen ist. Bezeichne mit X_i, $i = 1, \ldots, 6$, die Anzahl der Würfe bis die i-te verschiedene Zahl geworfen wurde. Sei $Y_1 = 1$, $Y_i := X_i - X_{i-1}$, $i = 2, \ldots, 6$.

1. Wie ist $Y_i - 1$, $i = 2, \ldots, 6$ verteilt?

2. Wie groß ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen X_6?

3. Man hat gerade die dritte verschiedene Augenzahl gewürfelt. Wie groß ist die Varianz der Zahl der Würfe, die man braucht bis das vierte verschiedene Wurfergebnis kommt?

Negative Binomialverteilung

Für $r = 1$ erhalten wir die geometrische Verteilung.

Bernoulli-Experiment: $(\{0,1\}, P)$, **mit** $P(1) = p$ **und** $P(0) = 1 - p$**.**

Negative Binomialverteilung X mit Parametern r und p zählt die Anzahl von 0en bevor die $r$te 1 eintritt, wenn wir das Bernoulli-Experiment unabhängig wiederholen.

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k, \text{ für } k \in \mathbb{N}_0$$

$$E(X) = r \cdot \frac{1-p}{p}$$

$$Var(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

Beispiel: Aus einer Urne mit genau 30 Kugeln, nämlich 12 weißen und 18 roten werden (blind) nacheinander und mit Zurücklegen Kugeln entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass vor der vierten weißen Kugel schon 10 rote Kugeln gezogen werden?

Negative Binomialverteilung

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Für eine Lieferung werden 8 fehlerfreie Stücke eines Artikels benötigt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Artikel fehlerfrei ist, beträgt 0.8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung genau mit der Herstellung des 10. Artikels abgeschlossen wird?

Hypergeometrische Verteilung

Hypergeometrische Verteilung X mit Parametern N, S und n zählt die Anzahl von Erfolgen beim n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen.

$$P(X = k) = \frac{\binom{S}{k} \cdot \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ für } k \in \{0, \dots, n\}$$

$$E(X) = n \cdot \frac{S}{N}$$

$$Var(X) = n \cdot \frac{S}{N} \cdot \left(1 - \frac{S}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Beispiel: **Aus einer Urne mit genau 30 Kugeln, nämlich 12 weißen und 18 roten werden (blind) und OHNE Zurücklegen 10 Kugeln entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Kugeln genau 6 rot sind?**

Hypergeometrische Verteilung

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Auf einer Ausstellung von 20 Gemälden befinden sich 16 Originale und 4 Fälschungen. Ein Besucher wählt zufällig 4 Bilder aus und kauft diese.

a) Wie ist die zufällige Anzahl X der Originale unter den 4 gekauften Bildern verteilt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 3 Originale gekauft hat?

c) Jedes Original kann er mit Gewinn von 100 € verkaufen. Bei jeder Fälschung macht er 300 € Verlust. Wie groß ist der erwartete Gewinn?

Poisson Verteilung

Poisson Verteilung X **mit Parameter** λ **zählt die Anzahl von seltenen unabhängig auftretenden Ereignissen, mit Durchschnittsrate** λ**.**

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ für } k \in \mathbb{N}_0$$

$$\approx \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Für großes n kann die Binomialverteilung durch die Poisson Verteilung approximiert werden.

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

Beispiel: **In der Bundesliga fallen im Schnitt $\lambda = 3{,}03$ Tore pro Spiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Spiel genau ein Tor fällt?**

Poisson Verteilung

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Auf ein Schachfeld mit 64 Feldern fallen zufällig verteilt 100 Reiskörner. Was erwarten wir für die Anzahl von Feldern auf denen kein Reiskorn liegt?

Exponential-verteilung

stetig

Exponentialverteilung X mit Parameter λ misst die Wartezeit bis zum ersten Ereignis in einem Poisson-Experiment mit Parameter λ.

Dichte: $$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Beispiel: In einer Firma fallen pro Tag $\frac{1}{200}$ der elektronischen Geräte aus – und zwar unabhängig von ihrem Alter. Wie groß ist der Anteil der Teile, die höchstens 20 Tage halten?

Exponential-verteilung

stetig

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Aufgabe 2

Die Wartezeit X bei einer Telefon-Hotline sei exponentialverteilt mit Erwartungswert $E(X) = 10$ (Minuten).

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens fünf Minuten warten zu müssen?

2. Angenommen man hat bereits 5 Minuten gewartet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit noch mindestens 5 Minuten warten zu müssen?

3. Angenommen man ruft mit einem 2. Telefon gleichzeitig bei einer weiteren Hotline an, die unabhängig von der ersten Hotline arbeitet. Die Wartezeit Y sei wiederum exponentialverteilt und $P(Y \geq 8) = \frac{1}{e}$.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 5 Minuten warten zu müssen bis zumindest eine der beiden Anrufe beantwortet wird?

   b) Wie hoch ist die durchschnittliche Wartezeit bis zur ersten Antwort?

Normalverteilung

stetig

Normalverteilung X mit Parametern μ und σ wird benutzt zur Approximation der Binomialverteilung und Summen unabhängiger Zufallsvariablen.

Dichte: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \,.\, \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \,.\, \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t$$

$$E(X) = \mu \qquad\qquad Var(X) = \sigma^2$$

$X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ **ist Standardnormalverteilt (Erwartungswert 0, Varianz 1).**

Werte für die Standardnormalverteilung lassen sich in einer Tabelle ablesen.

Wir setzen dazu $P(X^* \leq x) = \Phi(x)$.

Es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Normalverteilung

stetig

Satz 4.3 (Satz von de Moivre-Laplace). *Es sei $0 < p < 1$ und X_n $B(n,p)$-verteilt sowie X_n^* die zu X_n gehörende standardisierte Zufallsvariable. Dann gilt für alle $a < b$:*

$$\lim_{n\to\infty} P(a \leq X_n^* \leq b) = \phi(b) - \phi(a)\ ,$$

wobei ϕ (wie üblich) die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Es folgt:

Ist X eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable, dann gilt

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Das $+\dfrac{1}{2}$ kann man auch weglassen.

Faustregel: gute Approximation, wenn $np(1-p) > 9$.

Normalverteilung

stetig

Satz 4.6 (Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy). *Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge (stochastisch) unabhängiger und identisch verteilter (kurz: u.i.v. oder i.i.d.) Zufallsvariabler mit $\sigma^2 = Var(X_1) > 0$. Setzen wir $\mu := E(X_1)$ und $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, so gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \leq b\right) = \phi(b) - \phi(a)\ .$$

$$P(S_n \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Ein Werkstück soll eine Bohrung erhalten mit einem Durchmesser von 50mm. Die Toleranzgrenzen sind $t_u = 49{,}97$mm und $t_o = 50{,}04$mm. Es sei bekannt, dass die von den Bohrautomaten erstellten Bohrungen $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt sind, wobei $\mu = 50$mm und $\sigma = 0.02$mm gelten soll. Ein Werkstück ist Ausschuss, wenn der Durchmesser größer als t_o ausfällt. Ist der Durchmesser kleiner als t_u, so muss eine Nachbohrung durchgeführt werden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück Ausschuss ist?

Sie Würfeln mit 30 Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme der 30 Würfel kleiner als 71 ist?

Gesetz der großen Zahlen

Satz 2.37 (Tschebyscheffsche Ungleichung). *Es seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:*

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \; .$$

Misst die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „weit“ vom Erwartungswert abgewichen wird.

Satz 2.38 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen für unabhängige Zufallsvariable mit beschränkter Varianz). *Seien $X_1, \ldots, X_n$ paarweise unabhängige Zufallsvariable mit gleichem Erwartungswert und endlicher Varianz $Var(X_k) \leq M$ für $1 \leq k \leq n$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{M}{n\varepsilon^2} \; .$$

Misst die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Mittel „weit“ vom Erwartungswert abgewichen wird. Für viele Wiederholungen strebt diese Wahrscheinlichkeit gegen 0.

Gesetz der großen Zahlen

Beispielaufgabe zu diesem Thema

Es wird n mal mit einem fairen Würfel gewürfelt. Sei X_i die Augenzahl im i-ten Wurf, $i = 1, \ldots, n$. Die mittlere Augenzahl ist daher $X := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Sei A das Ereignis, dass die Abweichung der mittleren Augenzahl X zur erwarteten Augenzahl eines Würfelwurfs, d.h. $E(X_i)$, größer oder gleich $\dfrac{1}{10}$ ist.

Bestimmen Sie die Mindestanzahl an Würfen, so dass $P(A) \leq \dfrac{1}{100}$.

Seien $X_1, \ldots, X_{100}$ unabhängige Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert μ und gleicher Varianz σ^2. Sei $Y := \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$ der Mittelwert. Wie groß darf σ höchstens sein, damit die Abweichung von Y zu μ mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% höchstens 1,5 beträgt, d.h.

$$P(|Y - \mu| < 1,5) \geq 0.96$$

TEIL 3

Noch nicht lange her, also sehr sehr knapp

Erwartungstreu

Box-Plot

Mittelwert

Empirische Varianz

Median

Stichprobe

Unteres Quartil

Histogramm

Schätzfunktion

Maximum-Likelihood Schätzer

Realisierung einer Schätzfunktion

Oberes Quartil

Konkrete Stichprobe

Konfidenzintervalle

Sei Y eine Zufallsvariable, die die Treffer bei einer n-fachen Wiederholung eines Bernoulli-Experimentes zählt. Gesucht ist ein Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit p des Bernoulli-Experimentes.

Konkrete Stichprobe: $Y = k$
Geforderte Genauigkeit: $1 - \alpha$

Bestimme den Wert $c = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ **aus einer Tabelle**

$1-\beta$	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
$c = \phi^{-1}(1-\beta)$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

$$p_u(k) \approx \frac{k}{n} - c \cdot \sqrt{\frac{k(n-k)}{n^3}}$$

$$p_o(k) \approx \frac{k}{n} + c \cdot \sqrt{\frac{k(n-k)}{n^3}}$$

Konfidenzintervall $[p_u(k), p_o(k)]$

Anhand der konkreten Stichprobe k schätzen wir, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ gilt:
$p \in [p_u(k), p_o(k)]$

Hypothesentest

... letzte Woche und heute