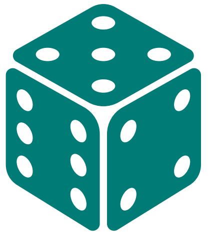
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik



Vorlesung 5

Zufallsvariablen

Definition 2.1

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Mit endlichem oder abzählbarem Wertebereich

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

heißt diskrete Zufallsvariable auf Ω.

Zufallsvariablen

Sei X eine (diskrete) Zufallsvariable auf Ω. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Ereignisse:

$(X = x) := \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$ **und** $(X \leq x) := \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}$.

Definition 2.3

(a) Die Funktion

$$
\begin{aligned}
V = V_X : \quad X(\Omega) &\to [0,1] \\
x &\mapsto V(x) = P(X = x)
\end{aligned}
$$

heißt Verteilung der Zufallsvariablen X.

(b) Die Funktion $F = F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$F(x) = P(X \leq x)$$

heißt Verteilungsfunktion von X.

Zufallsvariablen

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$$

$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}$$

Satz 2.5. *Ist X eine diskrete Zufallsvariable mit Wertemenge $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, so gilt für die zugehörige Verteilungsfunktion F:*

(a) *Für $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$.*

(b) *Ist $x < y$, so gilt $F(x) \leq F(y)$. (Monotonie)*

(c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Zufallsvariablen

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$$

$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\}$$

Satz 2.7. *Ist F die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen X, so gilt für alle reellen Zahlen $a < b$:*

(a) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

(b) $P(X > a) = 1 - F(a)$.

Hier ist:

$$(a < X \leq b) := \{\omega \in \Omega \,|\, a < X(\omega) \leq b\}$$

$$(X > x) := \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > x\}$$

Erwartungswert

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$$

Definition 2.9.

Sei X eine diskrete Zufallsvariable und Ω höchstens abzählbar. Falls die Reihe $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| P(\omega)$ konvergiert, so heißt

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$$

Erwartungswert von X. Der Erwartungswert wird oft mit $E(X) = \mu$ bezeichnet.

Es gilt stets $E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \cdot P(X = x_i)$.

Auch für allgemeinen Wahrscheinlichkeitsraum Ω und diskrete X!

Erwartungswert

Satz 2.12. *Sind X, Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit existierenden Erwartungswerten, so gelten folgende Aussagen:*

(i) Linearität des Erwartungswerts: Für beliebige Konstante $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$E(aX + b) = aE(X) + b. \tag{2.2}$$

Zudem gilt:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \tag{2.3}$$

Erwartungswert

Fünf Personen haben Ihre Jacken an einer Garderobe abgegeben. Später werden die Jacken zufällig an die fünf Personen herausgegeben. Was erwarten wir für die Anzahl von Personen, die Ihre eigene Jacke bekommen haben?

Varianz

Definition 2.13.

(a) Ist X eine diskrete Zufallsvariable und existiert $E(X^2)$, so heißt

$$Var(X) := E((X - E(X))^2) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

die Varianz von X.

(b)

$$\sigma := \sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

heißt Standardabweichung von X.

Die Varianz ist ein Maß dafür, wie sehr die Zufallsvariable dazu neigt vom Erwartungswert abzuweichen.

Die Standardabweichung gibt an, welche Abweichung vom Erwartungswert wir erwarten.

Varianz

Satz 2.16 (Rechenregeln für die Varianz). *Sind X, X_i, $i = 1, \dots, n$ Zufallsvariable, für die $E(X^2)$ und $E(X_i^2)$ existieren, so gilt:*

(i) $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$. (Verschiebungssatz)

(ii) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.