Geom. Vert. $E(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$

↳ X = # von Misserf. vor den 1. Erfolg

Andere Lit: $E(Y) = \frac{1}{p}$

Y = Wann kommt der 1. Erfolg

$Y = X + 1$

$E(Y) = E(X) + 1$

Bsp: Wie groß ist die W'keit, dass unter 900 Studierenden (zufällig ausgewählten) genau 4 am 4.12. Geburtstag haben?

Wir vernachlässigen Schaltjahre.

1) Für jede Person ist die W'keit am 4.12 Geburtstag zu haben $\frac{1}{365} = p$

2) Geburtstag von einer Person ist unabh. von Geb. von anderer Person

$\rightsquigarrow$ Binomial Vert.

Setze $X = k \Leftrightarrow k$ Personen haben am 4.12. Geburtstag

$\to \quad X \sim B(900, \frac{1}{365})$

$P(X=4) = \binom{900}{4} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^4 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{896} = \underline{0{,}13095}$

Approx. mit Poisson: $P(X=4) \sim \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = \underline{0{,}13083}$

$\lambda = p \cdot n = \frac{900}{365}$

Gesetz der kleinen Zahlen

$p = \frac{1}{n}$, n $\rightsquigarrow$ $B_{n,1/n}$ - Verteilung $\rightsquigarrow$ Approx. mit Poisson: $\lambda = 1$

$n \cdot p = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

$P(X=0) = ?$

$P(X=0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{n}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-0} \approx \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1}{1} \cdot e^{-1}$

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Bsp: Brötchen: $\varepsilon = 5$:

$\frac{Var(X)}{\varepsilon^2} = \frac{9}{5^2}$

Bew von Tschebyscheff:

Def.: $Y := \begin{cases} \varepsilon^2, & \text{wenn } |X - E(X)| \geq \varepsilon \\ 0, & \text{wenn } |X - E(X)| < \varepsilon \end{cases}$

$E(|X - E(X)|^2) = Var\ X$

Dann: $Y \leq |X - E(X)|^2$ falls $|X - E(X)| \geq \varepsilon$ ✓

falls $|X - E(X)| < \varepsilon$ ✓

$\Downarrow$

$E(Y) \leq E(|X - E(X)|^2) = Var\ X$

$E(Y) = \varepsilon^2 \cdot P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) + 0 \cdot P(|X - E(X)| < \varepsilon)$

$Y(\Omega) = \{0, \varepsilon^2\}$

$\Rightarrow \quad \varepsilon^2 \cdot P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = E(Y) \leq Var\ X \quad / : \varepsilon^2$

□

Bem: Tscheb. Ungleichung kann nützlich sein, nur wenn $\frac{Var\ X}{\varepsilon^2} < 1$.

Bew. des GGZ:

Benutze Tschebyscheff für: $Y = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$

$E(Y) = \frac{n \cdot E(X_1)}{n} = E(X_1)$

$Var(Y) \overset{\boxed{X_i \text{ unabh.}}}{=} \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)\right) \leq \frac{1}{n^2} \cdot (\underbrace{M + \ldots + M}_{n\text{-mal}}) = \frac{n \cdot M}{n^2} = \frac{M}{n}$

$= \frac{1}{n^2} Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$

$Var\ X_i \leq M$

Einsetzen: $P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var\ Y}{\varepsilon^2} \leq \frac{M}{n \cdot \varepsilon^2}$

$\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \underbrace{\frac{1}{37}}_{E(X_1)}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{37} - \frac{1}{100} < \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} < \frac{1}{37} + \frac{1}{100} \quad / \cdot 37000$

$n = 37000$

$\Leftrightarrow \underset{= 630}{1000 - 370} < \underbrace{X_1 + \ldots + X_{37000}}_{\text{Anzahl von 17'er beim 37000-mal Spielen}} < 1000 + 370 = 1370$

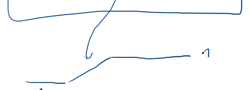
$\Rightarrow P(630 < \#\,17\text{en} < 1370) = P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{1}{37}\right| < \frac{1}{100}\right)$

$= 1 - \underbrace{P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{1}{37}\right| \geq \frac{1}{100}\right)}_{\leq 0{,}00071} \geq 0{,}99929$

Bsp: Warten auf Bus:

$P(X > 2) = P(X \leq 3) = F(3) = \frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{3}{5}$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{5} x, \quad x \in [0, 5]}$



$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{5} x, & x \in [0, 5] \\ 1, & x > 5 \end{cases}$

$\rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{5}, & x \in (0, 5) \\ 0, & x > 5 \end{cases}$

$\lim_{x \to \infty} P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$, $\quad \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx \overset{\text{def. des uneigentl. } \int}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \leq n) = \Omega$