WT - Vorlesung 8

$\underbrace{[\cdot\cdot \quad \cdot]}_{n-1}\underbrace{1}_{n}$ $\quad P(\text{an } n\text{-ten Stelle ist } 1) = p$

$(r-1)$-mal 1

$(n-1)-(r-1) = n-r$ -mal 0

Binomialverteilung: $P(\text{bei den ersten } (n-1) \text{ Versuchen kommt } (r-1)\text{-mal die } 1)$

$$= \underbrace{\binom{n-1}{r-1}\cdot p^{r-1}(1-p)^{n-r}}_{B_{n-1,p}(r-1)}$$

Insgesamt: Folie 1

$$\binom{n-1}{r-1}\cdot p^{r-1}\cdot(1-p)^{n-r}\cdot p = \binom{n-1}{r-1}\cdot p^r (1-p)^{n-r}$$

Fragen zu Def. von nB - Verteilung:

1. Name?
2. Ist es eine Verteilung? $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$?

Zu 1: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k}}{k!}$, $\quad n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}$

Für $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$: Definiere $\binom{m}{k} := \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!}$

Bsp: $\binom{-1}{k} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-k)}{k!} = (-1)^k$

$$\binom{k+r-1}{k} = \frac{(k+r-1)\cdot\ldots\cdot(1+r-1)}{k!} = \frac{(k+r-1)\cdot\ldots\cdot r}{k!} = (-1)^k\frac{(-r)\cdot(-r-1)\cdot\ldots\cdot(-r-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k\binom{-r}{k}$$

$\leadsto$ Name der Verteilung

Frage 2: $\sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{k}\cdot p^r\cdot(1-p)^k \quad \boxed{\overset{?}{=} 1}$

$$= p^r\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{-r}{k}(1-p)^k = p^r\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r}{k}(p-1)^k$$

$|p-1| < 1$

Binomial - Satz: $(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}a^k b^{r-k}$

$b=1$: $(1+a)^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}a^k$ $\quad \binom{r}{k}=0$ für $k>r$

Gilt auch für r negativ! (Bew: aus Taylor) für $|a|<1$.

Also $\sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k) = p^r\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r}{k}(p-1)^k = p^r\cdot(\underbrace{1+p-1}_{p})^{-r} = p^r\cdot p^{-r} = 1$

$\boxed{a=p-1}$, $-r$ statt r

tatsächlich Verteilung!

Bsp NBV:

Wahrscheinlichkeit, dass bei 1 Mischen $\underbrace{\text{Pik}}_{\text{„1", „Erfolg"}} = \frac{1}{4}$ ← Farben

„0" ... 3 andere Farben

$n = 10$, $r = 4$, $k = 10-4 = 6$

$X \sim$ Anzahl von anderen Farben bevor der 4-ten Pik - Karte

$\leadsto P(X=6) = \binom{9}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6$

Frage: Wann erwarten wir, dass 4. Pik-Karte kommt?

Bew. von Satz 2.26 (E).

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\binom{k+r-1}{k}\cdot p^r\cdot(1-p)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\cancel{k}\cdot\frac{(k+r-1)!}{\cancel{k!}\,(k-1)!\,(r-1)!}p^r(1-p)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1+r)!}{(k-1)!\,\cancel{r}\cdot(r-1)!}\cdot\cancel{r}\cdot p^r\cdot(1-p)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{k-1+r}{k-1}\cdot r\cdot p^r(1-p)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r}{k}\cdot r\, p^r (1-p)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+\tilde{r}-1}{k}r\cdot p^{\tilde{r}-1}\cdot(1-p)^k\cdot(1-p)$$

$\boxed{r = \tilde{r}-1}$

$$= r\cdot\frac{1}{p}(1-p)\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+\tilde{r}-1}{k}\cdot p^{\tilde{r}}\cdot(1-p)^k}_{nB(\tilde{r},p)\ \overset{\shortparallel}{1}} = r\cdot\frac{1-p}{p}$$

□

$E(X) = 4\cdot\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 4\cdot\frac{3/4}{1/4} = 12$ ... Erw., wie viele andere Farben kommen, bevor der 4. Pik-Karte

Antwort: Wir erwarten $12 + \underbrace{4}_{\text{Pik-Karten}} = 16$ Versuche.

Frage HGV

insgesamt:

- $\binom{N}{n}$ Möglichkeiten, welche n Kugeln gezogen werden
- $\binom{S}{k}\cdot\binom{N-S}{n-k}$ passende Möglichkeiten

$\binom{S}{k}$: ↳ k schwarze; $\binom{N-S}{n-k}$: ↳ andere Farbe

Bem: Aus der Überlegung mit der Urne (S schwarze Kugeln...)

$\leadsto$ HG - Verteilung ist eine Verteilung:

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1 \quad : \quad \{$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{S}{k}\cdot\binom{N-S}{n-k} = \binom{N}{n}$$

endlich viele Möglichkeiten, wie viele schwarze Kugeln.

Beweisidee von Satz 2.31: nummeriere die schwarzen Kugeln in der Urne $1, 2, \ldots, S$

für $i = 1,\ldots,S$: $X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Kugel } i \text{ gezogen wurde} \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_S$

$$E(X) = E(X_1 + \ldots + X_S) = \sum_{i=1}^{S} E(X_i) = S\cdot E(X_1) = S\cdot\frac{n}{N}$$

$$E(X_1) = 1\cdot\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} + 0\cdot P(X_1 = 0) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \overset{\text{kürzen}}{=} \ldots = \frac{n}{N}$$

$(n-1)$ andere Kugeln aus übrigen $N-1$

$X_1 = 1$, wenn Kugel 1 gezogen

zu Varianz:

$$E((X_1 + \ldots + X_S)^2) = E\left(\sum_{i=1}^{S} X_i^2 + \sum_{i\neq j} X_i X_j\right) = S\cdot E(X_1^2) + S\cdot(S-1)\cdot E(X_1\cdot X_2)$$

$(X_1^2 = X_1)$

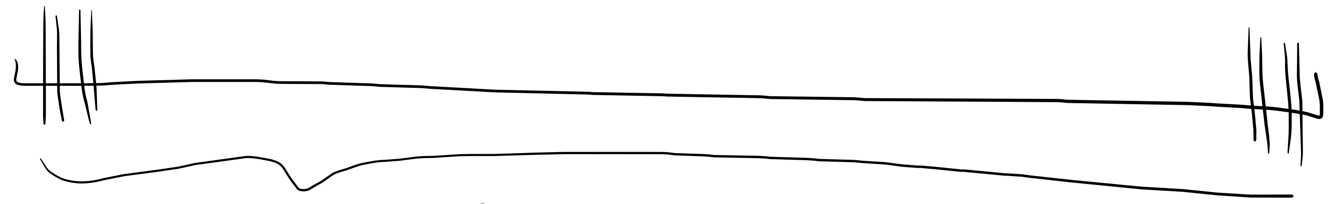
$E(X_1\cdot X_2)$:

$X_1\cdot X_2 = \begin{cases} 1, & \text{wenn sowohl Kugel 1 als auch Kugel 2 gezogen wurden} \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

... $\left(E(X_1 X_2) = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n\cdot(n-1)}{N(N-1)} \right)$

$E(X_1^2) = E(X_1)$ ... wir kennen alles in der Varianz

Bsp: Fußball



Spiel = 90 min

$n = 90 \cdot 60 =$ Sekunden

In 1 Sekunde höchstens 1 Tor: p unbekannt $=$ W., dass in 1s Tor fällt

Verteilung: $X \sim B(n, p)$

$$\lambda = E(X) = n \cdot p_n \rightsquigarrow p_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{3{,}21}{5400}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} n \text{ groß} \\ p_n = \frac{\lambda}{n} \end{array}}$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow_{x=-\lambda} \qquad \downarrow$$

$$1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \quad \frac{\lambda^k}{k!} \quad e^{-\lambda} \quad \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}$$

$$\boxed{k \text{ fest}, n \to \infty}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x} \cdot x} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x$$

Folie 11: Anteil von torlosen Spielen $\approx P(X=0)$

Bem: Poisson-Verteilung ist eine Vert.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$