WT 14

Bsp: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, Nehme an: μ unbekannt, σ^2 bekannt

$P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$

$\parallel$

$P(|X-\mu| \le k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$

$\parallel$

$P(\underbrace{X - k\sigma}_{\hat\mu_u(X)} \le \mu \le \underbrace{X + k\sigma}_{\hat\mu_o(X)}) = \underline{2\Phi(k) - 1}$

z.B: Maschine stellt Produkte her mit Größe $\sim N(\mu, \sigma^2)$

μ: Einstellbar, (↗ ↘), nicht bekannt, zu welchem μ genau das führt

σ^2: die Ungenauigkeit bekannt

wir wollen auf der rechten Seite:

$1 - \alpha = 2\Phi(k) - 1$ $\quad /+1$

$2 - \alpha = 2\Phi(k)$

$\Phi(k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\underline{k = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})}$

$\longrightarrow P_\vartheta(\hat\vartheta_u \le \vartheta \le \hat\vartheta_o) = 1 - \alpha$

Zu Konfidenzniveau α $\rightsquigarrow$ Konf. Intervall $(\underbrace{X - \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\cdot\sigma}_{\hat\mu_u}, \underbrace{X + \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\cdot\sigma}_{\hat\mu_o})$

Stichprobe $X_1, X_2, \dots, X_n$ $\underline{\text{unabhängig}}$

$X_i \sim (\mu, \sigma^2)$ $\Rightarrow$ $S_n = \underline{X_1 + \dots + X_n} \sim N(n\cdot\mu, n\cdot\sigma^2)$

$\bar X = \underline{\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$

Zu $\overset{\text{Konf. Niv.}}{\alpha}$ ... $\left(\bar X - \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{n}}\sigma}_{\text{Var. von } \bar X}, \bar X + \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \tfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sigma\right)$ Konf. Int. für μ

σ ↓ bekannt (Annahme)

Bsp: Bernoulli Exp., n

Stichprobe $Y = \#\text{Treffer} = k$ $\quad Y = X_1 + \dots + X_n$, $\quad X_i = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ 1 & \text{Treffer/Erfolg} \end{cases}$

Moivre-Laplace:

$P(E(S_n) - k\sqrt{\operatorname{Var} S_n} \le S_n \le E(S_n) + k\sqrt{\operatorname{Var} S_n}) \underset{\uparrow\, n \text{ groß}}{\sim} 2\Phi(k) - 1$

$Y = S_n$, $\quad E(S_n) = p\cdot n$, $\quad \operatorname{Var}(S_n) = n\cdot p\cdot(1-p)$

$Y \sim B(n,p)$

$P(p\cdot n - c\cdot\sqrt{np(1-p)} \le Y \le p\cdot n + c\cdot\sqrt{np(1-p)}) \sim 2\Phi(c) - 1 = 1 - \alpha$

$\parallel$ $\quad$ für $c = \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ wie vorher

$P(Y - c\sqrt{np(1-p)} \le p\cdot n \le Y + c\sqrt{np(1-p)}) \sim (1-\alpha)$

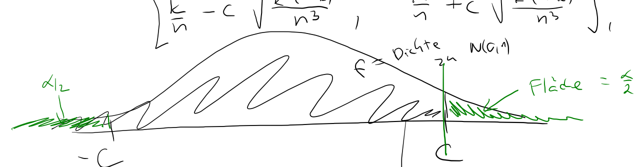
$P\left(\frac{Y}{n} - c\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \le \underline{p} \le \frac{Y}{n} + c\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \sim (1-\alpha)$

wenn $Y = k$ ... dann $\underline{p \sim \frac{k}{n}}$ ... Ansatz für (ungefähr)

$p \sim \frac{k}{n}$, $1 - p = \frac{n-k}{n}$

$\rightsquigarrow$ Für Konf.-Niveau α, bekommen wir Konf. Intervall $\underline{(Y=k)}$

$\left[\frac{k}{n} - c\sqrt{\frac{k(n-k)}{n^3}}, \frac{k}{n} + c\sqrt{\frac{k\cdot(n-k)}{n^3}}\right]$, mit $c = \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$



$\Phi(c) = \underline{1 - \frac{\alpha}{2}}$

Wilson Intervall: $\frac{k - n\hat p_o + 0{,}5}{\sqrt{n\hat p_o(1-\hat p_o)}} \approx c$ $\rightsquigarrow$ Quadratische Gleichung für $\hat p_o$

Bsp: Wurf mit Münze (unfair) 100-mal

Stichprobe: 60-mal Kopf

p = W., dass Kopf fällt ... Vorher $\hat p = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Konf.-Intervall ? zu $\boxed{\alpha = 0{,}05}$

- Wald-Intervall: ($k = 60$, $n = 100$) ... $\underline{[0{,}5040, 0{,}6960]}$ (mit W. 95% liegt p hier)
- Wilson: $[0{,}4970; 0{,}6952]$ fast das selbe

$\sim [0{,}5, 0{,}7]$

Tee Lady:

$\Theta = [\frac{1}{2}, 1]$, $\quad \Theta_0 = \{\frac{1}{2}\}$, $\quad \Theta_1 = (\frac{1}{2}, 1]$

H_0: Lady rät $(p = \frac{1}{2})$, $\quad H_1: p > \frac{1}{2}$

Unterteile $\{0, 1, 2, \dots, 20\} = \underbrace{\{0, 1, \dots, k'\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{k'+1, \dots, 20\}}_{K_1}$

Falls $p = \frac{1}{2}$ ... $P(X = 14) = \binom{20}{14}\left(\frac{1}{2}\right)^{14}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20-14} = 0{,}036\dots$

$P(X \ge 14) = \sum_{k=14}^{20} P(X = k) = \dots = \underline{0{,}057\dots} > 0{,}05$

Wir wollen: $P_{\substack{H_0 \\ p = 1/2}}(X > k') < \underbrace{0{,}05}_{\alpha}$

hier: $g(\frac{1}{2}) = \sum_{k=k'+1}^{20}\binom{20}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = P_{1/2}(X > k')$ ... wollen $< 0{,}05$

$\Theta_0 = \{\frac{1}{2}\}$

$k' = 15$:

$P_{1/2}(X > 15) < 0{,}05$. Also wählen wir $k' = 15$

Entscheidungsregel: ≤ 15 Treffer ... „sie rät" H_0

≥ 16 Treffer ... „sie kann etwas erschmecken" H_1

Fehler 1. Art (sie rät, aber wir denken, dass sie es erschmecken kann)

$< \underbrace{0{,}05}_{\text{Signifikanz}}$