WT 13

Idee (Formal, Fische im Teich):

Unbekannt: $N = \#$ Fische im Teich, 30 markiert

$P(\text{von 40 sind } \underline{5 \text{ markiert}}) = \underbrace{\dfrac{\binom{30}{5} \cdot \binom{N-30}{35}}{\binom{N}{40}}}_{f(N)}$ ... für welches N maximal?

hypergeometr. Vert.

Idee: $N \rightsquigarrow N+1$ ... $f(N) \rightsquigarrow f(N+1)$ ... $N = 240$ ↳ Maximum — Skript

---

Bsp: Münzwurf ... $\underline{\binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}} = P(Y = k)$

$Y = X_1 + \dots + X_n$

konkrete Stichprobe: $(\underbrace{1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \dots\dots, 1}_{60\text{-mal } 1,\ 40\text{-mal } 0}) = (x_1, \dots, x_{100})$

$L(x_1, \dots, x_{100}; p) = p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot \dots = p^{60} \cdot (1-p)^{40}$ maximal

$L(\underbrace{x_1, \dots, x_{100}}_{k\text{-mal } 1,\ (100-k)\text{-mal } 0}; p) = p^k \cdot (1-p)^{100-k}$ ...

$\Leftrightarrow \binom{100}{60} \cdot p^{60} \cdot (1-p)^{40}$ maximal

$\Leftrightarrow p = \frac{3}{5}$

Bsp: $X \sim$ Poisson-Verteilt, λ nicht bekannt

$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$; $\underline{(x_1, \dots, x_n) \text{ konkr. Stichprobe}}$, gegeben

$L_x(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X_k = x_k; \lambda) = \underline{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{x_k}}{x_k!} \cdot e^{-\lambda} \right)}$ ... max. für welches λ?

$\lambda \in (0, \infty)$

$\lim_{\lambda \to 0} L_x(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} L_x(\lambda) = 0$

im Maximum muss $L_x'(\lambda) \overset{!}{=} 0$

$= \dfrac{\lambda^{x_1 + \dots + x_n}}{\prod_{k=1}^{n} x_k!} \cdot e^{-n \cdot \lambda}$, $L_x'(\lambda) = \dots \overset{!}{=} 0$

↳ $\lambda = \dots$

Lemma Eine Funktion $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ stetig hat in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Maximum $\Leftrightarrow$ $\ln L$ hat in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein max.

$(\ln L)(x) = \ln(L(x))$

$(\ln L): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

Bew: Trivial, da $\ln$ streng mon. wachsende Funktion

Für $L_x(\lambda) \rightsquigarrow \mathcal{L}_x(\lambda) := \ln(L_x(\lambda))$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

In unserem Fall: $\underline{\mathcal{L}_x(\lambda)} = \ln\left(\lambda^{x_1 + \dots + x_n}\right) - \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k!\right) + \ln\left(e^{-n\lambda}\right)$

$= (x_1 + \dots + x_n) \cdot \ln \lambda - \underbrace{\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k!\right)}_{\text{konst.}} - n\lambda$

$\mathcal{L}_x'(\lambda) = (x_1 + \dots + x_n) \cdot \frac{1}{\lambda} - n \overset{!}{=} 0$

$(x_1 + \dots + x_n) = n \cdot \lambda$ $\quad / :n$

↳ $\hat{\lambda} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \underline{\bar{x}}$

Bem: $\underline{E(X) = \lambda}$

Bsp: $X \sim$ Exponentialverteilung, mit λ unbekannt

Dichte: $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

konkr. Stichprobe $(x_1, \dots, x_n)$

$L_x(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \left(\lambda \cdot e^{-\lambda x_k} \right) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda (x_1 + \dots + x_n)}$ ... max für welches λ?

$\mathcal{L}_x(\lambda) = \ln L_x(\lambda) = n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \cdot (x_1 + \dots + x_n)$

$\mathcal{L}_x'(\lambda) = n \cdot \frac{1}{\lambda} - (x_1 + \dots + x_n) \overset{!}{=} 0$

$\frac{n}{\lambda} = x_1 + \dots + x_n$

$\hat{\lambda} = \frac{n}{x_1 + \dots + x_n} = \frac{1}{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}} = \underline{\frac{1}{\bar{x}}}$ ... Tatsächlich Punkt von Maximum (...)

Konsistent mit $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Bsp: Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right)$

.. Eine Schätzung für μ ... $\bar{x}$

für σ ... s empirische Standardabw.

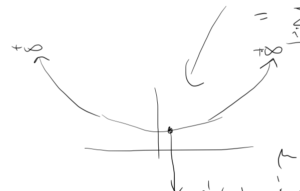
$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

$\underline{L(\mu, \sigma^2)} = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma^2) = \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\sigma^n}} \cdot \exp\left(\underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2} \right)$

σ gegeben: max. (in μ) $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$ minimal

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$ minimal

$= \underline{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - 2 \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mu + \underline{n \cdot \mu^2} = f(\mu)$



$f'(\mu) \overset{!}{=} 0$

$n \cdot 2\underline{\mu} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{!}{=} 0$

Schätzung für μ ⟶ $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$

Schätzung für σ?

$L(\bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\sigma^n} \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \right)$

bekannt aus der Stichprobe

$\mathcal{L}(\bar{x}, \sigma^2) = \ln L(\bar{x}, \sigma^2) = \dots = \ln \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} - n \cdot \ln \sigma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$

$\underline{\mathcal{L}'(\bar{x}, \sigma^2) \overset{!}{=} 0} \rightsquigarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$