WT 12

$$P\left(\underbrace{\frac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}} \le b\right) = \Phi(b)$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n - n\cdot\mu \le b\cdot\sigma\cdot\sqrt{n}$$

$$S_n \le \underbrace{b\cdot\sigma\cdot\sqrt{n} + n\mu}_{=x} \quad \leadsto \quad b = \frac{x - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}$$

$$P(S_n \le x) = P(S_n \le b\cdot\sigma\cdot\sqrt{n} + n\cdot\mu) = P\left(\frac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \le b\right) = \Phi(b)$$

$$= \Phi\left(\frac{x - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}\right)$$

Bsp 100-mal Würfeln (unabh.), mit fairen Würfel

X_i = Augenzahl bei i-tem Wurf

$S = X_1 + \dots + X_{100}$ Summe der Augenzahlen nach 100 Würfen

$$E(X_i) = \frac{1+2+\dots+6}{6} = 3{,}5$$

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{1^2+2^2+\dots+6^2}{6} - (3{,}5)^2 \approx 2{,}9166$$

$$\Rightarrow E(S) = 100\cdot E(X_i) = 350$$

$$Var(S) \underset{X_i \text{ unabh.}}{=} 100\cdot Var(X_i) \approx 291{,}66 \quad , \quad \sqrt{Var\, S} = 17, \dots$$

$$P(350 - \sqrt{291{,}66} < S < 350 + \sqrt{291{,}66}) \approx 0{,}6826$$

$$P(332 < S < 368) \approx 0{,}6826$$

$$k=3: \ P(298 < S < 402) = P(350 - 3\cdot\sqrt{291{,}66} < S < 350 + 3\cdot\sqrt{291{,}66}) \approx 0{,}9974$$

Bem. zur emp. Varianz:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{=n\cdot\bar{x}} + n\cdot\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \underbrace{2\bar{x}\cdot n\cdot\bar{x}}_{-2n\bar{x}^2} + n\cdot\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\cdot\bar{x}^2 \quad \checkmark$$

Warum $\frac{1}{n-1}$ und nicht $\frac{1}{n}$?

1) $n=1$ keine Info für Var. $(x_1 - \bar{x} = 0)$

2) $n \ge 2$: Der Erwartungswert der empir. Varianz ist die Varianz!

$$E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\cdot\bar{X}^2\right)$$

$$\hookrightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^n E\, X_i^2 - n\, E\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)^2 = n\cdot E(X_1^2) - \frac{1}{n}E(X_1+\dots+X_n)^2$$

$$= n\cdot E(X_1^2) - \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{i\neq j} X_i\cdot X_j\right)$$

$$\underset{\boxed{X_i \text{ und } X_j \text{ unabh.}}}{=} n\cdot E(X_1^2) - \frac{1}{n}\cdot n\cdot E(X_1^2) - \frac{2}{n}\sum_{i\neq j}\underbrace{E(X_i\cdot X_j)}_{E(X_i)\cdot E(X_j)} =$$

$$= n\cdot E(X_1^2) - E(X_1^2) - \underbrace{\frac{2}{n}\cdot\binom{n}{2}}_{\frac{2}{n}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2} = (n-1)}\cdot E(X_1)\cdot E(X_1)$$

$$= (n-1)\left(E(X_1^2) - E(X_1)^2\right) = (n-1)\cdot Var(X_1)$$

Zum Erwartungswert:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n\cdot E(X) = E(X)$$

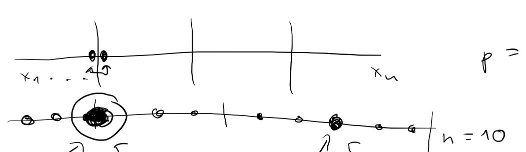
Zu p-Quantil:

$p = \frac{1}{2} \dots$

$$x_{1/2} = \begin{cases} x_{[np+1]} = x_{[\frac{n}{2}+1]} = x_{\frac{n+1}{2}} & \checkmark \text{ wenn } n\cdot\frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow n$ ungerade

$$[n\cdot\tfrac{1}{2}+1] = \left[\tfrac{n+2}{2}\right] = \frac{n+1}{2}$$



$x_{(3)} = x_{\frac{1}{4}}$

$x_{3/4} = x_{(8)}$

$p = \frac{1}{4}$, $4/n$

$4 \nmid n$

$$\left[\frac{n}{4}+1\right] = \left[\frac{10}{4}+1\right] = 3$$

Bsp: 60 mal Kopf von 100 Würfen:

$$f(p) = \underbrace{\binom{100}{60}\cdot p^{60}\cdot(1-p)^{40}} = P(X = 60)$$

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, f stetig auf $[0,1]$

$$f'(p) = \binom{100}{60}\cdot\left(60\cdot p^{59}\cdot(1-p)^{40} + p^{60}\cdot 40\cdot(1-p)^{39}\cdot\underbrace{(-1)}_{(1-p)'}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$= \binom{100}{60}p^{59}\cdot(1-p)^{39}\left(60\cdot(1-p) - 40\cdot p\right)$$

$$= \text{—\,''\,—} \quad (\underbrace{60 - 100p}_{=0})$$

$$60 = 100p,$$

$$p = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$