Bsp: Bus

Was ist P?

$\boxed{\Omega = (0,5]}$, was ist $\mathcal{A}$?

- Problem: Wir können nicht $\mathcal{A} = \mathcal{P}((0,5])$ haben und gleichzeitig:

  ↳ Potenzmenge

  - $P(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in (0,5]$
  - $P((0,5]) = 1$
  - $(a,b] \subset (0,5]$, $0 \le a < b \le 5 \ldots \quad P((a,b]) = \frac{b-a}{5}$

Satz (Existenzsatz von Lebesguemaß): Es $\exists$ eine σ-Alg. $\mathcal{A}$ auf $\mathbb{R}$, und Es existiert ein Maß λ (wie Wahrscheinlichkeit, ohne $P(\Omega)=1$), so dass:

- $(a,b), [a,b], (a,b], [a,b) \in \mathcal{A}$
- $\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = \ldots = b-a$

↳ nicht trivial!

↳ in unserem Bsp: $(a,b] \subset (0,5] \ldots \quad P((a,b]) = \frac{b-a}{5}$

$$P = \frac{\lambda|_{(0,5]}}{5}$$

Ab jetzt: Beschreibung durch Verteilungsfn / Dichtefunktion

Satz 3.2 (a)

$f(t) \ge 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \ldots \quad F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt \overset{\boxed{x<y}}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}_{F(x)} + \int_{x}^{y} \underbrace{f(t)}_{\ge 0}\,dt \ge F(x)$

Bem zu 3.3:

$\forall x \in \mathbb{R}$: $P(X=x) = \lim_{n\to\infty} P(\underbrace{x-\tfrac{1}{n} < X \le x}_{(x-\frac{1}{n},x] \ldots \text{ Länge } \frac{1}{n}}) = \lim_{n\to\infty} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x} f(t)\,dt = 0$

$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x-\tfrac{1}{n}, x] = (x-1,x] \cap (x-\tfrac{1}{2},x] \cap (x-\tfrac{1}{3},x] \cap \ldots$

$\Rightarrow \quad P([a,b]) = P((a,b]) = P([a,b)) = P((a,b))$

X stetige ZV: $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = \ldots$

---

zur Frage: $P(X=k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$E(X) \overset{\text{Bus}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \int_0^5 x \cdot \frac{1}{5}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{5}\right]_0^5 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$f = \begin{cases} 1/5, & (0,5] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bem: $\mathrm{Var}(X) = E((X-E(X))^2)$

Poisson-Verteilung:

$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, $\quad \lambda \sim$ durchschnittliche Anzahl von Ereignissen in $[0,1)$

$E(X) = \lambda$

(Wartezeit $> t$) $\Leftrightarrow$ kein Ereignis in $[0,t]$

↳ Anzahl von Ereignissen in $[0,t]$ ist Y selber Poisson-Vert., mit $\tilde{\lambda} = \lambda \cdot t$

$\lambda \rightsquigarrow \tilde{\lambda}$

$t \in \mathbb{R}_0^+$: $P(\text{Wartezeit} > t) = P(Y=0) = \frac{(\lambda \cdot t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$

anders: $t = n$: $P(\text{Wartezeit} > n) = P(\text{in } [0,1) \text{ kein Er.}) \cdot P(\text{in } [1,2) \text{ kein Er.}) \cdot \ldots \cdot P(\text{in } [n-1,n) \text{ kein Er.})$

$= (e^{-\lambda})^n = e^{-\lambda n}$

$X \ldots$ = Wartezeit auf das 1. Ereignis bei Poisson

$\boxed{x \ge 0}$

$F(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x} = \int_0^x f(t)\,dt$

$f(t) = F'(t) = (1-e^{-\lambda t})' = -e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$

$f(t) = 0, \quad t < 0$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx \overset{\text{Part. Int.}}{=} \left[x \cdot (-e^{-\lambda x})\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-\lambda x}\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \\ v = -e^{-\lambda x} & \end{array}} \qquad \boxed{\int u v' = uv - \int u' v}$$

$= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}$

$\boxed{\lambda > 0}$

$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{\to 0}\right) - \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot \underbrace{e^0}_{1}\right) = \frac{1}{\lambda}$

$\left(\lim_{x\to\infty} (x \cdot e^{-\lambda x}) = 0\right)$

- $\mathrm{Var}\, X \overset{\text{ähnlich}}{=} \underset{(2x \text{ part. Int.})}{\ldots} = \frac{1}{\lambda^2}$

Bem: „Die Exponentialverteilung ist gedächtnislos":

D.h. $\boxed{\begin{array}{c} x > 0 \\ t > 0 \end{array}}$ $\quad \underbrace{P(X \ge x+t \mid X > x)}_{\text{Bedingte W'keit}} \overset{?}{=} P(X \ge t)$

$\| \quad \frac{P((X \ge x+t) \cap (X > x))}{P(X > x)} \overset{X>x}{=} \frac{P(X \ge x+t)}{P(X > x)} = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}$

$= \frac{1-(1-e^{-\lambda(x+t)})}{1-(1-e^{-\lambda x})} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = \frac{\cancel{e^{-\lambda x}} \cdot e^{-\lambda t}}{\cancel{e^{-\lambda x}}} = e^{-\lambda t}$

$= P(X \ge t)$