Aufgabensammlung

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Aufgabe 1

In einer Stadt mit 40.000 Einwohnern erscheinen zwei Tageszeitungen. Zeitung A lesen 9.000 Einwohner, Zeitung B lesen 7.000 Einwohner. Von diesen Zeitungslesern lesen 1.000 beide Zeitungen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Einwohner

a) mindestens eine Zeitung

b) genau eine Zeitung liest?

Aufgabe 2

Skizzieren Sie folgende Mengen (= Ereignisse) in einem Venn-Diagramm:

a) $\overline{A \cup B}$

b) $A \cap \overline{B}$

c) $\overline{A} \cap B$

d) $\overline{A} \cap \overline{B}$

e) $\overline{A} \setminus \overline{B}$

Aufgabe 3

1) Seien A, B Ereignisse mit

$$P(A) = \frac{3}{8}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Berechnen Sie:

a) $P(A \cup B)$
b) $P(\overline{A})$
c) $P(\overline{B})$
d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$
e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
f) $P(A \cap \overline{B})$
g) $P(B \cap \overline{A})$

2) Gegeben sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sowie die Ereignisse $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $D = \{3, 4, 5\}$.

   Bilden Sie folgende Ereignisse:

   $A \cup B$; $\quad A \cap B$; $\quad (A \cup C) \cap D$; $\quad (A \cap C) \cup D$

   $\overline{A} \cup \overline{B}$; $\quad \overline{(A \cap C)}$; $\quad \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$; $\quad \overline{(A \cup B)} \cap C$

Aufgabe 4 (Beispiel Laplace-Raum)

Ein Glücksrad verfügt über 12 gleichgroße, mit 1 bis 12 durchnummerierte Felder.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt das Rad bei einem bestimmten dieser Felder (z.B. Feld 1) stehen?

b) Was sind hier Ω (Grundraum) und $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ (Wahrscheinlichkeitsverteilung)?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt das Rad bei einer durch 3 teilbaren Zahl stehen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit bei einer Primzahl? Mit welcher Wahrscheinlichkeit nicht bei einer Primzahl?

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

$$P(A \cap B) \leq P(A) \cdot P(B)$$

Aufgabe 6

Ein Würfel wird so manipuliert, dass die Wahrscheinlichkeit, mit ihm eine bestimmte Zahl zu würfeln, proportional zu dieser Zahl ist.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

   A: ein gerade Augenzahl wird geworfen

   B: eine Primzahl wird geworfen

   C: eine ungerade Augenzahl wird geworfen

c) Berechnen Sie $P(A \cup B), P(B \cap C)$ und $P(A \cap \overline{B})$.

Aufgabe 7

Zeigen Sie: Für drei Ereignisse A, B, C mit $A \cap B \cap C = \emptyset$ gilt

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \setminus B) + P(C \setminus A) + P(B \setminus C).$$

Aufgabe 8

Sei $\Omega = \{1, 2 \ldots, 6\}$. Was ist die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\{1, 2\} \subset \mathcal{A}$ und $\{3, 4\} \subset \mathcal{A}$?

2 Kombinatorik

Aufgabe 1 (Rechentraining: Binomialkoeffizienten)

Berechnen Sie folgenden Ausdrücke:

a) $\binom{6}{3}$ b) $\binom{50}{48}$ c) Zeigen Sie: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Aufgabe 2

Es werden gleichzeitig drei faire Münzen geworfen.

a) Man gebe ein geeignetes Ω an.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass

b) dreimal Wappen,

c) einmal Wappen und zweimal Zahl auftritt.

Aufgabe 3

a) An einem Pferderennen nehmen 8 Pferde teil. Wie viele verschiedene Top-3-Platzierungen (mit Reihenfolge) sind unter den 8 Pferden möglich?

b) Bei einem Glücksrad mit 12 nummerierten Feldern (von 1 bis 12) wird zweimal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite gedrehte Feldnummer größer als die Erste?

Aufgabe 4

Wie viele Permutationen der Objekte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt es, bei denen a_1 und a_2 benachbart bleiben?

Aufgabe 5

An der Bude gibt es 5 verschiedene Süßigkeiten. Alle kosten $10ct$. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich eine gemischte Tüte für 1€ zusammenzustellen? Wie viele Möglichkeiten bleiben, wenn jede Süßigkeit mindestens einmal in der Tüte sein soll?

Aufgabe 6

Auf wie viele Weisen kann man 10 nicht unterscheidbare Kaninchen auf drei unterscheidbare Käfige verteilen? Wie verändert sich die Antwort, wenn alle Kaninchen unterscheidbar sind?

Aufgabe 7

Beim Skat (Deck mit 32 Karten) erhält jeder der drei Spieler 10 Karten, während die restlichen beiden Karten in den Skat gelegt werden.

a) Auf wie viele verschiedene Weisen können die 32 Karten so verteilt werden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

   (i) der Kreuz-Bube

   (ii) genau ein Bube

   (iii) zwei Buben

   im Skat liegen?

Aufgabe 8

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei fairen (=Laplace-)Würfeln

a) drei gleiche Augenzahlen

b) genau zwei gleiche Augenzahlen

c) drei (paarweise) verschiedene Augenzahlen

d) mindestens eine 6

zu würfeln?

Aufgabe 9

Aus 5 Paaren werden zufällig 4 Personen ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter ihnen kein Paar?

Aufgabe 10

Wie viele Permutationen können aus den Buchstaben folgender Wörter gebildet werden?

a) ROT

b) OTTO

c) NONNE

d) STUTTGART

Aufgabe 11

Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Lakritzstange, zwei Gummibärchen und drei Kaubonbons auf 6 Kinder zu verteilen und zwar so, dass jedes Kind genau eine Süßigkeit bekommt?

Aufgabe 12

9 Studierende sollen 3 Gruppen bilden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn man fordert, dass

a) jede Gruppe aus 3 Personen besteht?

b) jede Gruppe aus mindestens 2 und höchstens 4 Personen besteht?

Aufgabe 13

Ein Memory-Spiel mit 16 Pärchen (also 32 Karten) wird gemischt. Anschließend werden verdreht immer zwei Karten zusammengelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichket, dass alle Pärchen nebeneinander liegen?

Aufgabe 14

Unter 10 Büchern befinden sich 3 Taschenbücher. Die Bücher werden in zufälliger Reihenfolge in ein Regal gestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die 3 Taschenbücher dann nebeneinander?

Aufgabe 15

Wieviele Diagonalen hat ein

a) Siebeneck

b) n-Eck?

Aufgabe 16

Wahrscheinlichkeiten von Pokerhänden bestimmen: Drilling, zwei Paare, Flush (alle Karten haben die gleich Farbe).
(Pokerhand: Man bekommt 5 Karten aus einem 52er Kartenspiel.)

Aufgabe 17

In einer Lostrommel befinden sich 30 Nieten, 30 Lose für Trostpreise mit einem Wert unter dem Lospreis und 20 Lose für Gewinne mit einem Wert über dem Lospreis. Moritz kauft 5 Lose.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau 2 Nieten?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau einen echten Gewinn (keinen Trostpreis) und dabei höchstens eine Niete?

Aufgabe 18

Aus 24 Deutschen, 12 Amerikanern und 18 Franzosen werden zufällig zwei Personen ausgewählt.

a) Auf wie viele Arten ist das möglich? (ohne Berücksichtigung der Nationalität, ohne RF)

b) Wie viele Nationalitäten-Kombinationen können auftreten? (ohne RF)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das die zwei ausgewählten Personen

   (i) Deutsche
   (ii) ein Amerikaner und ein Deutscher
   (iii) von verschiedener Nationalität

   sind?

Aufgabe 19

Auf wie viele Arten kann man die Zahl 100 in drei Summanden (nichtnegativ und ganzzahlig) unter Berücksichtigung der Reihenfolge zerlegen?

3 Mehrstufige Zufallsexperimente, Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 1 (Beispiel 1.11.im Skript)

Wir betrachten eine Urne mit 2 roten und 3 schwarzen Kugeln. Es wird rein zufällig eine Kugel aus der Urne gezogen; ihre Farbe wird notiert und anschließend werden diese Kugel und eine weitere Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Nach gutem Durchmischen wird wiederum eine Kugel aus der Urne gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel rot?

Aufgabe 2

Aus einer Urne mit zwei weißen und zwei schwarzen Kugeln werden zwei Kugeln entnommen und in eine zweite Urne mit drei weißen und fünf schwarzen Kugeln gelegt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, anschließend aus der zweiten Urne eine weiße Kugel zu ziehen?

Aufgabe 3

In einer Spielshow gibt es 5 Türen. Hinter einer Tür ist ein Gewinn, hinter vier Türen ein Zonk. Sie wählen eine Tür aus. Danach öffnet der Moderator 2 Türen, hinter denen ein Zonk ist. Sie dürfen nun, wenn Sie wollen, eine andere Tür wählen. Sollen Sie? Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit, den Gewinn zu finden?

Aufgabe 4

Zwei Würfel werden nacheinander geworfen. Wie groß ist unter der Bedingung, dass die beiden Augenzahlen verschieden sind, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) Genau ein Würfel 6 zeigt

b) Mindestens ein Würfel 6 zeigt

c) Die Augensumme 6 ist?

Aufgabe 5

Durch eine statistische Untersuchung sei festgestellt worden, dass 5 % aller Männer und 1 % aller Frauen farbenblind sind. Eine Gruppe besteht zu 60 % aus Frauen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichket, dass eine zufällig ausgewählte Person aus der Gruppe farbenblind ist?

b) Aus der Gruppe wird zufällig eine Person ausgewählt. Diese ist farbenblind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Mann handelt?

Aufgabe 6

Nach einer Schätzung von Experten kann man bei 100.000 Geldscheinen mit etwa 200 Fälschungen rechnen.

a) Als Laie können Sie nicht über die Echtheit eines 20-€-Scheins im Geldbeutel entscheiden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p(F)$, dass der Schein gefälscht ist?

   F ist das Ereignis: *Schein ist gefälscht.*

b) Die Bank hat für die Kunden einen Prüfungsautomaten aufgestellt. Bei einem falschen Schein gibt der Automat eine Blinkwarnung. Leider ist der Autmat noch nicht absolut zuverlässig: Einen falschen Schein erkennt er mit 95 %iger Sicherheit, d.h. von 100 falschen Scheinen erkennt er dies in der Regel bei 95 Scheinen. Umgekehrt gibt er bei einem echten Schein in 10 % der Fälle einen falschen Blinkalarm.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Automat Blinkalarm gibt, wenn man einen Schein zur Prüfung eingibt?

c) Bei der Prüfung eines Scheins blinkt der Automat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schein tatsächlich falsch ist?

d) Die Bank möchte das Verfahren verbessern. Dazu vergibt sie einen Entwicklungsauftrag an ein Ingenieurbüro. Diesem gelingt eine deutliche Verbesserung des Autmaten: Er erkennt nun einen falschen Schein mit 98 % Sicherheit und bei einem echten Schein gibt es nur noch in 5 % der Fälle Fehlalarm. Wieder blinkt der Automat bei Prüfung eines Scheins. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schein falsch ist?

Aufgabe 7 (Beispiel: Simpson-Paradoxon)

Fußballspieler A und B werden in den Saisons 21/22 und 22/23 bei der folgenden Anzahl von Spielen eingesetzt und schießen dabei folgende Anzahl von Toren:

Spieler A	21/22	22/23
# Spiele	70	30
# Tore	50	15

Spieler B	21/22	22/23
# Spiele	40	60
# Tore	30	32

a) Vergleichen Sie für die Spieler A und B ihre Statistik Tore/Spiel in den einzelnen Saisons und insgesamt. Finden Sie eine intuitive Erklärung, warum das kein Widerspruch ist.

b) Berechnen Sie die Statistik Tore/Spiel für jeweils den Spieler A bzw. B in den 2 Saisons gesamt als gewichteten Durchschnitt der Statistiken in den einzelnen Saisons.

Aufgabe 8

Eine Person fährt an $\frac{3}{4}$ aller Tage mit dem Bus zur Uni. In 80% dieser Fälle kommt sie pünktlich an. Insgesamt ist die Person nur an 70% aller Tage pünktlich an der Uni. Heute ist sie pünktlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichket, dass sie heute den Bus genommen hat? Wie groß ist die Wahrscheinlichket, dass die Person pünktlich ist, wenn sie nicht den Bus nimmt?

Aufgabe 9

Erfahrungsgemäß kommen 0,1% aller neugeborenen Jungen und 0,7% aller neugeborenen Mädchen mit einem Hüftleiden zur Welt. Durch eine Ultraschalluntersuchung können 90% aller Hüftschäden entdeckt werden, 97 % aller gesunden Hüften werden als solche erkannt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt ist 0,514. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt das Ultraschallgerät nach einer Geburt ein Hüftleiden an? Gegeben, dass die Ultraschlalluntersuchung bei einem Jungen Hüftschaden anzeigt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Junge tatsächlich Hüftschaden hat? Wie verändert sich die Antwort bei einem Mädchen?

4 Stochastische Unabhängigkeit

Aufgabe 1

Ein Würfel wird dreimal gewofen. Betrachte

A: der erste Wurf zeigt eine 6;

B: Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist gerade;

C: mindestens ein Würfel zeigt eine 3.

Überprüfe, welche dieser Ereignisse unabhängig sind.
Überlegen Sie zuerst, was Sie erwarten!

Aufgabe 2

Die Kinder der sechsten Klasse einer Schule werden durch einen Test auf ihre Rechenfähigkeiten geprüft. Die Anzahl der Jungen und der Mädchen, die den Test bestanden oder nicht bestanden haben, sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

	Test nicht bestanden	Test bestanden
Jungen	40	20
Mädchen	45	25

Sind die Ereignisse A (ein zufällig gewähltes Kind ist ein Mädchen) und B (ein zufällig gewähltes Kind hat bestanden) stochastisch unabhängig?

Aufgabe 3

(a) Es seien A, B unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

gilt.

(b) Zeige: Sind A und B unabhängig, dann sind auch $\bar{A}$ und $\bar{B}$ unabhängig.

5 Diskrete Zufallsvariablen: Erwartungswert, Varianz, Unabhängigkeit

Aufgabe 1 (Beispiel 2.4. aus Skript)

Ein Laplace-Würfel wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der ungeraden Zahlen, die dabei geworfen wird. Bestimme $\Omega, X(\Omega)$, V_X und F_X.

Aufgabe 2

Etwas historisch ...
Ein Radiosender veranstaltet ein Gewinnspiel, bei dem es einmal 1000 Euro, viermal 500 Euro sowie 200-mal ein Buch im Wert von 18 Euro zu gewinnen gibt. Um in die Verlosung zu gelangen, muss man die richtige Antwort für ein Rätsel einsenden. X sei die Zufallsvariable, die einem Teilnehmenden seinen Gewinn in Euro (evtl. 0) zuweist.

a) Angenommen, es werden genau 10.000 richtige Antworten eingesendet: Wie groß sind Erwartungswert und Varianz von X?

b) Wie viele richtige Lösungen dürfen maximal eingesendet werden, damit sich eine Teilnahme am Gewinnspiel (in Erwartung) noch lohnt, wenn Postkartenportokosten i.H.v. 0,70 Euro anfallen?

Aufgabe 3

An einer Kinogarderobe geben 4 Personen ihre Regenschirme ab. Die Regenschirme sind alle verschieden. Nach Ende des Films gibt das Garderobenpersonal die Schirme zufällig zurück. Die Zufallsvariable X beschreibe die Zahl der Personen, die ihren eigenen Schirm wiederbekommen haben. Bestimmen Sie Verteilung, Erwartungswert und Varianz von X.
In der Vorlesung der Erwartungswert für 5 Personen, mit Trick als Summe 5 Zufallsvariablen. Hier muss man auch die Verteilung berechnen; man kann den E vergleichen. Im Allgemeinen s. Skript Bsp. 1.25, das ich aber nicht besprochen habe.

Aufgabe 4

Eine diskrete Zufallsvariable X mit Werten $x_1, \dots, x_n$ heißt *gleichverteilt*, falls $P(X = x_k) = p \in (0, 1)$ für $k = 1, \dots, n$ gilt.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Zeigen Sie, dass es keine auf abzählbar-unendlich vielen Werten gleichverteilte (diskrete) Zufallsvariable gibt.

Aufgabe 5

Fünf Gegenstände werden zufällig auf drei Kästchen verteilt. Dabei beschreibe die

Zufallsvariable X die Anzahl der Kästchen, die dabei leer bleiben. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

Aufgabe 6

Bei einem Glücksspiel wirft ein Teilnehmer drei faire Würfel. Bei Augensumme 18 erhält er 40 Euro, bei Augensumme 17 noch 20 Euro. Der Einsatz beträgt einen Euro.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung des Nettogewinns des Veranstalters für dieses Spiel.

b) Wie ändern sich die Ergebnisse aus a), falls sowohl der Einsatz als auch die Auszahlungen verdoppelt würden?

Aufgabe 7

In einer Urne befinden sich fünf gleichartige Kugeln mit den Nummern 1 bis 5. Es werden zufällig zwei Kugeln auf einmal herausgegriffen.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der größten herausgegriffenen Zahl X.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 8

Ein Betrunkener kommt im Dunkeln nach Hause. Die Haustür ist abgeschlossen und er hat n Schlüssel in der Tasche, von denen nur einer passt. Er entnimmt seiner Tasche zufällig einen Schlüssel, probiert ihn, und falls er nicht passt

- legt er ihn beiseite
- steckt er ihn in die Tasche zurück.

In beiden Fällen probiert er so lange, bis er den passenden Schlüssel gefunden hat. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der zum Öffnen der Tür benötigten Versuche. Berechnen Sie den Erwartungswert in beiden Fällen und die Varianz im Fall a):
In der Vorlesung der Erwartungswert für "Wann wird das erste Mal eine 6 gewürfelt" berechnet, also Fall b) mit $n = 6$. Kann hier auch mit z.B. $n = 10$ statt allgemeinem n gemacht werden.

Aufgabe 9

Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) besitze die Verteilung

$x_i \backslash y_i$	1	2	3
1	0,1	0,2	0,3
2	0	0,2	0,2

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen X und Y. Sie die beiden Zufallsvariablen stochastisch unabhängigg?

b) Bestimmen Sie Verteilung, Erwartungswert und Varianz der Summe $X + Y$

c) Bestimmen Sie Verteilung, Erwartungswert und Varianz des Produkts $X \cdot Y$

Aufgabe 10

In einem Multiple-Choice Test gibt es 8 Fragen mit je 3 Antwortmöglichkeiten. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Anzahl vollständig richtig beantworteter Fragen, wenn

(a) immer genau eine Antwort richtig ist

(b) eine, zwei oder drei Antworten richtig sein können

und der Test zufällig ausgefüllt wird (*in (b) in jeder Frage zufällig eine der 7 Mö glichkeiten*).
Varianz mittels unabhängigen ZV und Referenz zu Binomialverteilung. S. auch Aufgabe 1 im folgenden Abschnitt.

Aufgabe 11

Eine faire Münze wird viermal geworfen. X sei die Anzahl der Merkmale W, die bei ersten beiden Würfen erscheinen, Y die Anzahl der Merkmale Z bei den zwei letzten Würfen.

a) Konstruieren Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle für X und Y.

b) Überprüfen Sie X und Y auf Unabhängigkeit.

Aufgabe 12

Drei Gegenstände werden zufällig auf 3 Kisten verteilt. Sei X die ZV, die die Anzahl der leeren Kisten beschreibt. Sei Y die ZV, die die Anzahl der Gegenstände in der ersten Kiste beschreibt. Stellen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle auf. Sind X und Y unabhängig?

6 Binomialverteilung

Aufgabe 1 (kann mit Aufgabe 10 im vorherigen Abschnitt integriert werden)

Eine Multiple-Choice-Klausur kann theoretisch durch reines Raten bestanden werden. Es sei eine solche MSC mit 10 Fragen gegeben, bei der bei jeder Frage genau eine von vier Antwortmöglichkeiten richtig ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen reinen Rater, genau eine oder genau zwei Fragen richtig zu beantworten?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Rater, die Klausur zu bestehen, wenn er dafür mindestens 50% der Fragen richtig beantworten muss?

c) Wie viele richtige Antworten erwarten Sie durchschnittlich bei einem reinen Rater?

Aufgabe 2

Ein neugeborenes Kind ist mit Wahrscheinlichkeit 0,515 ein Junge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Familie mit sechs Kindern

a) alle Kinder Mädchen sind?

b) genau 5 Kinder Mädchen sind?

c) mindestens 3 Kinder Mädchen sind?

Aufgabe 3

Ein Spielautomat hat pro Dreh eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$, den Spieler gewinnen zu lassen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Spielen genau zweimal zu gewinnen?

b) Bestimmen Sie die Anzahl n der Drehungen, bei der die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal zu gewinnen, über alle $n \in \mathbb{N}$ maximal ist.

4. Aufgabe: Es ist bekannt, dass 40% aller Menschen die Blutgruppe Null besitzen. Nach einem Aufruf zur Blutspende melden sich unabhängig voneinander 10 Studenten im Kreiskrankenhaus zur Spende.

a) Wie ist die zufällige Anzahl X der Studenten mit Blutgruppe Null verteilt? (Parameter nicht vergessen!)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Student die Blutgruppe Null besitzt?

c) 120 Euro ist der Wert einer Blutspende bei der Blutgruppe Null, bei allen anderen Blutgruppen sind es 10 Euro weniger. Wie groß ist der erwartete Wert der Blutspenden der 10 Studenten?

Lösung:

a) X - zufällige Anzahl der Studenten mit Blutgruppe Null
X ist binomialverteilt ($X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$) mit $n = 10$ und $p = 0,4$.

b)

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^9 \right) \\ &= 1 - (0,00605 + 0,04031) \approx \underline{0,954} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Student die Blutgruppe Null besitzt, beträgt 0,954.

c) $120 \text{ €} \cdot X$ = Wert der Blutspenden mit Blutgruppe Null.
$110 \text{ €} \cdot (10 - X)$ = Wert der Blutspenden bei allen anderen Blutgruppen.

$$\begin{aligned} W &= 120 \text{ €} \cdot X + 110 \text{ €} \cdot (10 - X) \\ &= 10 \text{ €} \cdot X + 1100 \text{ €} \\ \mathbf{E}W &= 10 \text{ €} \cdot \mathbf{E}X + 1100 \text{ €} \\ &= 10 \text{ €} \cdot 4 + 1100 \text{ €} \\ &= \underline{1140 \text{ €}} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathbf{E}X = n \cdot p = 10 \cdot 0,4 = 4$$

Der erwartete Wert der Blutspenden der 10 Studenten ist 1140 €.

Aufgabe 5 (Sehr standard, Variation auch in VL, kann übersprungen werden)

Von maschinell hergestellten Schrauben sind durchschnittlich 20% Ausschuß (=unbrauchbar). Der Tagesproduktion der Herstellungsmaschine wird eine Stichprobe über 10 Schrauben entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von diesen Schrauben

a) genau 2 unbrauchbar sind?

b) mehr als 2 unbrauchbar sind?

c) mehr als 5 unbrauchbar sind?

Aufgabe 6

Zum Klassentreffen 2023 haben sich 30 ehemalige Schüler*innen im Restaurant 'La Informatica' in Duisburg verabredet. Der Organisator dieses Treffens hatte allerdings nicht bedacht, dass es in Duisburg 3 Restaurants mit diesem Namen gibt: Eins in Neudorf, eins in Walsum und eins in Wedau. Jeder geht somit zufällig in eines der drei Restaurants.

a) Wieviele der 30 Personen sind im 'La Informatica' in Neudorf zu erwarten?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht niemand dorthin?

c) Tatsächlich gehen 13 dieser Personen dorthin. Wie wahrscheinlich war dies?

Aufgabe 7

Die Trefferwahrscheinlichkeit eines Schützen sei 40%.

a) Er schieß fünfmal auf ein Ziel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mindestens einmal getroffen?

b) Wie viele Schüsse muss er abgeben, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % mindestens zwei Treffer zu erzielen?

Aufgabe 8

Ein Student behauptet schmecken zu können, ob der Kaffee beim Eingießen auf die Milch gegeben wurde oder umgekehrt. Er erklärt sich auch zu einem Experiment bereit. Eine Person füllt zehn Tassen mit Milch und Kaffee. Bei jeder Tasse entscheidet er rein zufällig, ob zuerst die Milch oder zuerst der Kaffee in die Tasse gegeben wird. Nachdem alle Tassen gefüllt sind, wird der Student ins Zimmer gelassen und darf probieren. Nehmen Sie an, er rät nur und tippt bei jeder Tasse (jeweils unabhängig von den anderen) mit Wahrscheinlichkeit 0.5 auf die richtige Reihenfolge von Kaffee und Milch. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß er mindestens achtmal richtig tippt?

Mindestens acht richtige Tips sind gleichbedeutend mit höchstens zwei falschen Tips. Die Anzahl X der falschen Tips unter den zehn Versuchen ist hier aufgrund der Unabhängigkeit binomialverteilt mit den Parametern $p = 0.5$ (Wahrscheinlichkeit für einen falschen Tip in einem Versuch) und $n = 10$ (Anzahl der Versuche insgesamt).

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens zwei Tips falsch sind, gegeben durch:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Mit Hilfe der Binomialverteilung ergeben sich diese Wahrscheinlichkeiten als

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= \binom{10}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{10} = 0.000977 \\
P(X = 1) &= \binom{10}{1} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^9 = 0.009766 \\
P(X = 2) &= \binom{10}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^8 = 0.043945
\end{aligned}$$

Und damit ist schließlich $P(X \leq 2) = 0.054688$.

Alternativ erhält man dieses Ergebnis direkt mit der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung aus der Tabelle. : $P(X \leq 2) = F(2) = 0.054688$.

Aufgabe 9

In einer Schulkasse muss jeder, der 3-mal seine Mathe-Hausaufgaben nicht erledigt, einen Kuchen für die Klasse backen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler seine Hausaufgaben nicht erledigt, beträgt 0,1. Die Klasse hat 30 Schüler und es gibt 60 Unterrichtseinheiten pro Halbjahr. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Halbjahr mehr als 3 Kuchen gebacken werden müssen?
Die Angabe eines Rechenausdrucks ist ausreichend.

Aufgabe 10 (Wurde in einem Beweis in der Vorlesung benutzt)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien stochastisch unabhängige Zufallsvariable, die nur die Werte 0 und 1 annehmen und die alle die gleiche Verteilung $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$ besitzen. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

7 Geometrische Verteilung

Aufgabe 1

Eine Glühbirne geht pro Einschalten mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,003$ defekt. Laut Hersteller hat sie eine Lebensdauer von ≥ 3000 Einschalten. Stimmt diese Aussage für 90% der Glühbirnen?
Hinweis: Benutzen Sie die Bernoullische Ungleichung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x > -1$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2. Aufgabe: An einem neuen Werkstoff wird ein Belastungstest durchgeführt. Bei einer festgelegten extremen Krafteinwirkung bricht der Werkstoff oder er bricht nicht. Es ist bekannt, dass ein Bruch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 erfolgt.

a) Es werden unabhängig voneinander 7 Versuche durchgeführt. Wie wahrscheinlich ist es, dass mehr als 1 Bruch erfolgt?

b) In einer weiteren Versuchsreihe führt man den Belastungstest so lange durch, bis das erste Mal ein Bruch erfolgt.

   i. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mehr als 4 Versuche benötigt?

   ii. Ein Bruchversuch kostet 50 €. Wie groß sind die erwarteten Kosten der Versuche?

<u>Lösung:</u>

a) X zufällige Anzahl gebrochener Werkstcke
Binomialverteilung: $X \sim \mathbf{Bin}(7; 0,04)$

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0)$$
$$= 1 - \binom{7}{0} \cdot 0,04^0 \cdot (1 - 0,04)^7 - \binom{7}{1} \cdot 0,04^1 \cdot (1 - 0,04)^6 = \underline{0,0294}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 1 Bruch erfolgt, beträgt 0,0294.

b) X zufällige Anzahl der Versuche bis zum ersten Bruch
geometrische Verteilung: $X \sim Geo(0,04)$

   i) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$
   $$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4)$$
   $$= 1 - (p + p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p)^2 + p \cdot (1-p)^3)$$
   $$= 1 - 0,04 \cdot (1 + 0,96 + 0,96^2 + 0,96^3) = \underline{0,8493}$$

   Die Wahrscheinlichkeit, dass man mehr als 4 Versuche benötigt, beträgt 0,8493.

   ii) $EX = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,04} = 25$

   K: Kosten in €

   $K = X \cdot 50€$

   $EK = EX \cdot 50€ = 25 \cdot 50\ € = \underline{1250\ €}$

   Die erwarteten Kosten der Versuche sind 1250 €.

Aufgabe 3

Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass

$$V(k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

eine geometrische Verteilung ist. Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz dieser Verteilung.

Aufgabe 4 (Wenn etwas Schwierigeres gebraucht)

X und Y seien stochastisch unabhängige und mit Parameter p geometrisch verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable $Z = \min(X, Y)$, definiert durch $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$ für $\omega \in \Omega$?

8 Negative Binomialverteilung

Aufgabe 1

Ein Torwart hält einen Elfmeter mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,2$.

a) Nach wie vielen Versuchen erwarten wir, dass der erste $11m$ gehalten wird?

b) Er hält zum ersten Mal beim dritten Versuch. Wie wahrscheinlich war das?

c) In einer neuen Runde hält er von 10 Elfmetern genau 4. Wie wahrscheinlich war das?

d) Was ist der Erwartungswert für die Anzahl von gehaltenen $11m$ bei 10 Versuchen?

e) Er soll genau 4 Elfmeter halten. Was erwarten wir für die Anzahl der Versuch, die dafür nötig sind?

Aufgabe 2

In der Fußball-Bundesliga hat ein bestimmter Spieler in jedem Spiel eine Wahrscheinlichkeit von p, eine gelbe Karte zu bekommen. Erhält man 5 gelbe Karten in einer Saison (34 Spiele) wird man im nächsten Spiel gelb-gesperrt. Dabei nehmen wir an, dass er in jedem Spiel höchstens eine gelbe Karte bekommt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Spieler alle 34 Spiele bestreiten können, ohne gelb-gesperrt zu werden?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Spieler im vorletzten Spiel gesperrt? Die Angabe eines Rechenausdrucks ist ausreichend.

Aufgabe 3

Berechnen Sie $\binom{-3}{0}$, $\binom{-3}{1}$, $\binom{-3}{2}$, $\binom{-3}{3}$ und geben Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} \cdot 2^k \cdot 3^{-3-k}$$

an.

9 Hypergeometrische Verteilung

Aufgabe 1

In einer Gruppe von 90 Versuchspersonen befinden sich genau 30 Linkshänder. Sechs Personen werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 6 ausgewählten Personen genau 3 Linkshänder befinden?

Aufgabe 2

Eine pharmazeutische Firma liefert bestimmte Tabletten in Packungen zu 20 Stück. Laut Liefervertrag darf bei höchstens drei Tabletten einer Packung der in der Tablette enthaltene Wirkstoff um mehr als 1 % vom Sollwert abweichen. Jede Packung wird geprüft, indem man 3 Tabletten zufällig (ohne Zurücklegen) entnimmt. Sind die 3 Tabletten einwandfrei, wird die Packung angenommen, andernfalls wird sie zurückgegeben.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Packung mit genau drei nicht einwandfreien Tabletten (fälschlicherweise) zurückgegeben wird.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Packung mit genau vier nicht einwandfreien Tabletten (fälschlicherweise) angenommen?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Packung mit genau einer nicht einwandfreien Tablette (richigerweise) angenommen?

Aufgabe 3

In der Kühltheke eines Lebensmittelgeschäfts befinden sich 20 Flaschen Milch, von denen 14 frisch und 6 abgelaufen sind.

a) Es werden 3 Flaschen Milch entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie alle frisch?

b) Eine (zufällige) Flasche wird entnommen und gekauft. Der nächste Kunde entnimmt der Theke 3 Flaschen Milch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind diese auch wieder alle frisch?

c) Der Kunde aus b) stellt fest, dass die erste seiner drei Flaschen tatsächlich frisch ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt dies auch für die anderen beiden Flaschen?

10 Poisson Verteilung

Aufgabe 1

In einem kleinem Krankenhaus finden im Schnitt 2 Geburten pro Tag statt. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass morgen mindestens 3 Geburten dort stattfinden?

Aufgabe 2

Aus einer Glasschmelze, die durch Schmelzen der Flaschen aus einem Altglascontainer gewonnen wurde, werden 900 Flaschen hergestellt. Nur 800 davon sind brauchbar. Der Rest enthält je Flasche mindestens einen Fremdkörper im Glas. Schätzen Sie die Anzahl der Fremdkörper in der Glasschmelze.

Aufgabe 3

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Werkstück in einem gegebenen Jahr ein bestimmter Materialfehler auftritt, ist $\frac{1}{1000}$. Die Jahresproduktion umfasst 40000 Werkstücke.

a) Wie ist die zufällige Anzahl X der Werkstücke mit Materialfehler verteilt? Mit welcher Verteilung kann man näherungsweise rechnen? (Parameter nicht vergessen!)

b) Wei groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 3 Werkstücke den bestimmten Materialfehler haben? Die Produktionskosten eines Werstückes betragen 17 €. Werkstücke ohne Materialfehler können für 25 € verkauft werden, Werksücke mit Matrialfehler hingegen nur zum Materialwert von 5,50 €. Der Gewinn sind die Einnahmen durch Verkauf minus die Produktionskosten. Wie groß ist der erwartete Gewinn?

11 Tschebyscheffsche Ungleichung

Aufgabe 1

(S. auch Vorlesungen 8,9)
Wir nehmen an, dass in der Bundesliga im Schnitt $3,5$ Tore pro 90 Minuten Spielzeit fallen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten 10 Minuten mindestens ein Tor fällt?

b) Schätzen Sie mithilfe der Tschebyscheffschen Unleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass in einem Spiel entweder höchstens 1 Tor fällt oder zumindest 6 Tore fallen. Ist es eine gute Abschätzung? Vergleichen Sie mit der genauer Wahrscheinlichket.

c) Wenn zu viel Zeit übrig UND nur im Fall von Interesse: Schätzen Sie mithilfe der Tschebyscheffschen Unleichung die Wahrscheinlichket dafür ab, dass in einem Spiel mindestens n Tore fallen ($n \geq 8$). Drücken Sie diese Wahrscheinlichkeit genau aus und schätzen Sie sie mithilfe des Satzes von Taylor ab. Vergleichen Sie die Abschätzungen für $n = 10$.

Aufgabe 2

Jemand möchte testen, ob eine Münze eine Laplace-Münze ist. Dazu wirft er sie 500-mal und hält sie für eine Nicht-L-Münze, falls weniger als 230-mal oder mehr als 270-mal Kopf fällt. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, mit der er irrtümlicherweise eine faire L-Münze für eine nichtreguläre Münze hält.

Aufgabe 3

In einer Kleinstadt gebe es 10.000 Wähler. Der Bürgermeisterkandidat der Partei A möchte durch eine Befragung von n willkürlich ausgewählten Personen das Wahlergebnis mit einer Sicherheit von $97,5\%$ bis auf ± 1000 A-Wähler vorhersagen lassen. Welche Zahl n ist hinreichend? Rechnen Sie mit „Zurücklegen“: Personen werden (unabhängig voneinander) nacheinander ausgewählt, eine Person kann mehrmals befragt werden.

Aufgabe 4

a) Bei einer großen Feier werden 1800 Gäste erwartet. Jeder Gast, der an diesem Tag Geburtstag hat, erhält eine Flasche Sekt. Wie viele Flaschen müssen bereit gestellt werden, damit man mit 99,9%iger Sicherheit genug Flaschen hat?

b) Theodor möchte bei seiner privaten Feier genau so verfahren. Er hat 18 Gäste. Wie viele Flaschen braucht er?

Aufgabe 5 (Sehr ähnlich einer Übungsaufgabe...)

Ein Ikosaeder trägt auf jeweils 2 seiner 20 dreieckigen Flächen eine der 10 Zahlen $0, 1, \cdots, 9$. Es werde n-mal geworfen. $X_/i$ sei die Augenzahl des i-ten Wurfes.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für jedes $X_/i$.

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für die Augensummen S_n nach n Würfen. Was ergibt sich für $n = 10$ und $n = 100$?

c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für das arithmetische Mittel $\overline{X}$ der Augenzahlen nach n Würfen. Was ergibt sich für $n = 10$ und für $n = 100$?

d) Schätzen Sie mit der Tschebyscheffschen Ungleichung für 1) 10, 2) 100 Würfe die Wahrscheinlichkeit ab, dass das arithemtische Mittel der Augenzahlen im Intervall $(3; 6)$ bzw $(2; 7)$ liegt.

e) Lösen Sie mit der Tschebyscheffschen Ungleichung: Wie oft muss man das Ikosaeder werfen, um mit höchsten 10 % Wahrscheinlichkeit damit rechnen zu müssen, dass das arithmetische Mittel der Augenzahlen von seinem Erwartungswert um mehr als 2 abweicht?

12 Stetige ZV, Exponentialverteilung

Aufgabe 1

a) Für welchen Wert von c ist die folgende Funktion die Dichte einer stetigen Zufallsvariablen?

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (2x+1) & \text{falls } x \in (1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Berechnen Sie für dieses c die Verteilungsfunktion $F_X(x)$, den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ sowie die Varianz $\sigma^2(X)$ von X.

c) Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X = 1{,}5), \quad P(X \leq 1{,}5), \quad P(X \leq 3)$$

d) Bestimmen Sie den *Median* von X, d.h. diejenige Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die $P(X \leq x) = \frac{1}{2}$ gilt.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = a \cdot e^{-b|x|}, x \in \mathbb{R}$.

a) Unter welchen Bedingungen an a und b ist dies die Dichte einer stetigen Zufallsvariablen X?

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ von X.

Aufgabe 3

In der Kommunikations- und Zuverlässigkeitstheorie spielt die sog. Rayleigh-Verteilung eine Rolle. Die Dichtefunktion ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x \cdot e^{\frac{-bx^2}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Unter welchen Bedingungen an a und b ist f die Dichte einer stetigen Zufallsvariablen X?

b) Geben Sie für eine Rayleigh-verteilte Zufallsvariable X das kleinste Intervall $[0, c]$ an, in dem X mit 90 % Wahrscheinlichkeit ihren Wert annimmt.

Aufgabe 4

Ein LED-Lampen Hersteller behauptet, dass die erwartete Lebensdauer der Lampen 40.000 Stunden beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lampe höchstens 20.000 Stunden hält? Welche Annahmen haben Sie dabei getroffen?

Aufgabe 5 (Nur wenn etwas Schwierigeres benötigt)

Die Dichte von X sei $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Was ist die Dichte von X^2?

13 Normalverteilung

Aufgabe 1

Einem Geflügelhalter ist bekannt, dass das Gewicht eines aus der Produktion seiner Farm zufällig gewähltes Hühnereies durch eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\mu = 58,5\ g$ und Varianz $\sigma^2 = 5\ g$ beschrieben werden kann.

Berechnen Sie für jede der 3 nachstehend definierten Eier-Gewichtsklassen I, II, III, welcher Prozentsatz der Eier der Produktion in diese Gewichtsklasse fällt.

Gewichtsklasse I:	Eier mit		$X > 60,0\ g$
Gewichtsklasse II:	Eier mit	55,0 g	$< X \leq 60,0\ g$
Gewichtsklasse III:	Eier mit		$X \leq 55,0\ g$

Aufgabe 2

Eine Maschine produziert 500 mm lange Schrauben mit einer Standardabweichung von 10 mm. Die Länge der Schrauben sei normalverteilt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schraube kürzer als 485 mm ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schraube höchstens 501 mm und mindestens 499 mm lang ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schraube um mehr als 10% vom Sollwert (500 mm) abweicht.

Aufgabe 3

Saatgut wird in Päckchen zu je 0,5 kg verkauft. Jedes Päckchen enthält (rund) 1000 Samenkörner. Es ist bekannt, dass (etwa) 0,5 % der Körner nicht der Sorte des Saatgutes angehören. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem zufällig ausgewählten Päckchen mehr als drei andersartige Körner sind? Benutzen Sie eine geeignete Näherung!

Aufgabe 4

In einem Schraubenlager beträgt der Ausschussanteil 0,3 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufälligen Herausnahme von 500 Schrauben der Ausschussanteil bei höchstens 1 % liegt.

Aufgabe 5

Ein neuartiges Virus ist einer Studie zufolge bei 8 % der Bevölkerung behandlungsnotwendig. Die Kreisapotheke einer Stadt mit 20.000 Einwohnern möchte daher Behandlungsmaterialien im Voraus bestellen. Angenommen, jeder Einwohner dieser Stadt infiziert sich mit dem neuen Virus:

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden maximal 1.500 Behandlungsmaterialien benötigt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 1.350 Behandlungsmaterialien benötigt?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der benötigten Behandlungsmaterialien um nicht mehr als die Standardabweichung vom Erwartungswert ab?

Aufgabe 6

Nach einer gängigen Definition gilt ein Haushalt als arm, falls ihm weniger als 60 % des bundesdeutschen Durchschnittseinkommens zur Verfügung stehen.

a) Wie viel Prozent aller Haushalte gelten als arm, falls der bundesweite Durchschnitt 3000 Euro und die Standardabweichung 1600 Euro beträgt?

b) Wie hoch ist das Einkommen der wohlhabendsten 5 % aller Haushalte mindestens, falls das bundesweite Durchschnittseinkommen 2500 Euro und die Standardabweichung 1000 beträgt?

Aufgabe 7

Der Ausschuss einer Maschine betrage 10 %.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Lieferung von 1000 hergestellten Einheiten nicht mehr als 100 Einheiten Ausschuss?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Ausschussrate einer Lieferung von 1000 Einheiten um nicht mehr als die Standardabweichung vom Erwartungswert ab?

Aufgabe 8

Bei einem Prüfverfahren betrage die Wahrscheinlichkeit, eine Fehlentscheidung zu treffen, genau 0,05. Die Zufallsvariable X_n beschreibe die Anzahl von Fehlentscheidungen bei n unabhängigen Anwendungen dieses Verfahrens.

a) Geben Sie für den Spezialfall $n = 3$ die Verteilungsfunktion von X_n an.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 1000 Anwendungen des Verfahrens höchstens 40 Fehlentscheidungen getroffen werden.

Aufgabe 9

Berechnen Sie für das Zahlen-Lotto '6 aus 49' die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es bei einer Ausspielung mit

a) 13 983 816 (voneinaner unabhängigen) gespielten Tippreihen

b) 10^8 (voneinaner unabhängigen) gespielten Tippreihen

höchstens eine Tippreihe mit 6 Richtigen gibt. Benutzen Sie eine geeignete Näherung.

14 Zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 1

Beispiel aus der Vorlesung: Es wird 100-mal gewürfelt ($E = 3,5$, $Var \approx 2,9$). Geben Sie ein Intervall (mit Mittelpunkt 350) an, so dass die Augensumme mit Warhscheinlichkeit $0,95$ in diesem Intervall liegt.

Aufgabe 2

(Zuerst mit $j = 3$ machen)
In einem Computerprogramm wird nach jeder Operation auf die j-te Dezimale gerundet. Rundungsfehler addieren sich, sind unabhängig und gleichverteilt auf $[\frac{-10^{-j}}{2}, \frac{10^{-j}}{2}]$; $n = 10^6$ Operationen werden ausgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der absolute Rundungsfehler im Endresultat größer als $c = 500 \cdot 10^{-j}$ ist?

15 Deskriptive Statistik

Aufgabe 1

Sie messen an 14 Tagen, wie lange Ihr Weg zur Uni gedauert hat. Sie erhalten die Werte:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Dauer in min	23	19	21	23	18	15	20	29	22	21	18	20	19	21

- Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Varianz der Daten.
- Zeichnen Sie den Boxplot. Berechnen Sie vorher alle benötigten Kenngrößen.
- Wie viel Messungen gibt es, die wir nicht als "normal" betrachten?
- Berechnen Sie das $\frac{1}{7}$-Quantil und das $\frac{1}{8}$-Quantil der Daten.
- Zeichnen Sie ein Histogramm mit Teilintervallen

  $$[15; 17,5), [17,5; 19,5), [19,5; 21,5), [21,5; 23,5), [23,5; 30)$$

  und ein Histogramm mit Teilintervallen

  $$[14,5; 15,5), [15,5; 17,5), [17,5; 18,5), [18,5; 20,5),$$

  $$[20,5; 22,5), [22,5; 23,5), [23,5; 28,5), [28,5; 29,5).$$

  Diskutieren Sie über die Unterschiede. Welches Histogramm ist *sinnvoller* (darstellt die Situation besser) und warum?

16 Maximum-Likelihood-Schätzung

Aufgabe 1

Eine Urne enthält 3 Kugeln. Jede davon ist rot oder blau, mehr Information haben wir nicht. Sei θ die Anzahl der blauen Kugeln - es ist also $\theta \in \{0, 1, 2, 3\}$. Wir ziehen 4-mal je eine Kugel mit Zurücklegen. Seien X_1, X_2, X_3, X_4 die folgenden Zufallsvariablen:

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{falls die } i\text{-te Kugel blau ist;} \\ 0 & \text{falls die } i\text{-te Kugel rot ist.} \end{cases}$$

Wir füher das Experiment durch und beobachten folgende Werte:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1.$$

Wir beobachten also 3 blaue Kugeln.

- Finden Sie die Wahrscheinlichkeit der konkreten Stichprobe $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1)$ für jeden möglichen Wert von θ.
- Für welchen Wert von θ ist die Wahrscheinlichkeit dieser konkreten Stichprobe am größten?
- Finden Sie die Likelihood-Funktion $L(x_1, x_2, x_3, x_4; \theta)$ für eine allgemeine konkrete Stichprobe (x_1, x_2, x_3, x_4): drücken Sie $L(x_1, x_2, x_3, x_4; \theta)$ mithilfe der Anzahl der blauen Kugeln in der konkreten Stichprobe $k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ (und dem unbekannten Parameter θ) aus.

Aufgabe 2

Finden Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung für θ für die folgenden konkreten Stichproben.

(a) $X_i \sim B(3, \theta)$ und wir beobachten $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 3, 2, 2)$;

(b) X_i sind exponentialverteilt mit Parameter θ und wir beobachten

$$(x_1; x_2; x_3; x_4) = (1,23; 3,32; 1,98; ,2,12).$$

Aufgabe 3

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit der folgenden Verteilung, wobei $\theta \in [0, 1]$ ein unbekannter Parameter ist:

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{2}{3}\theta$	$\frac{1}{3}\theta$	$\frac{2}{3}(1-\theta)$	$\frac{1}{3}(1-\theta)$

Wir betrachten eine Stichprobe von X von Umfang 10. Berechnen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung von θ für die konkrete Stichprobe $(3, 0, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1)$.
Hinweis: Bilden Sie die Likelihood-Funktion $L_x(\theta)$ für diese konkrete Stichprobe x. Um diese zu maximieren, betrachten Sie $\log L_x(\theta)$ (genau wie in der Vorlesung) und leiten Sie ab.

Aufgabe 4

Betrachte die stetigen Verteilungen mit den folgenden Dichtefunktionen, die von einem unbekannten Parameter $\theta > 1$ abhängen. (Diese entsprechen der Pareto-Verteilung mit Parametern $x_0 = 1$ bzw. $x_0 = 2$.)

$$f_1(x) = \begin{cases} \theta \cdot x^{-\theta-1} & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \theta \cdot 2^{\theta} \cdot x^{-\theta-1} & \text{für } x \geq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die Maximum-Likelihood-Schätzfunktionen $\hat{\theta}_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, wenn $X_1, \ldots X_n$ unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen mit der Dichtefunktion f_i sind, für $i = 1$ und $i = 2$.

17 Konfidenzintervalle

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen über ein 95%-iges Konfidenzintervall für den Mittelwert eines Merkmals X ist richtig?

a) Je gößer der Stichprobenumfang n ist, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Merkmalswert außerhalb der Grenzen des Konfidenzintervalls liegt.

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegen die Merkmalswerte von X innerhalb der Grenzen des Konfidenzintervalls.

c) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% überdeckt das Konfidenzintervall den tatsächlichen Mittelwert.

d) Wenn α zunimmt, nimmt auch die Größe des Konfidenzintervalls zu.

e) Keine der vorstehenden Aussagen ist richtig!

Aufgabe 2

In einer Stichprobenuntersuchung wurde für die mittlere Reißfestigkeit μ von Stahlbändern zur Verpackung von Paletten (Maßeinheit: Newton) aus einer Stichprobe von 25 Stahlbändern das 95%-Konfidenzintervall ($g_u = 956$; $g_o = 1044$) berechnet. Es war bekannt, dass die Reißfestigkeit eines Stahlbandes näherungsweise normalverteilt ist mit der Standardabweichung $\sigma = 110$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Eine Verdoppelung des Stichprobenumfangs n führt zu einer Verdoppelung der Breite des Konfidenzintervalls.

b) Eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs n führt zu einer Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls.

c) Eine Halbierung des Stichprobenumfangs n führt zu einer Vervierfachung der Breite des Konfidenzintervalls.

d) Ein 90%- Konfidenzintervall wäre breiter als das oben angegebene.

e) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt die Reißfestigkeit eines Stahlbandes innerhalb der Grenzen des obigen Konfidenzintervalls.

f) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% ist die Intervallschätzung von μ falsch.

g) Keine der vorstehenden Aussagen ist richtig!

Aufgabe 3

An einer großen deutschen Universität (30000 Studierende) kandidierte für die Wahlen zum Studentenparlament eine neue Gruppierung mit dem Namen „Studenten, arbeitet und freut euch (SAUFE)“. Bei einer Blitzumfrage unter 625 Studenten ergab sich ein Anteil von 10%, die sich als Anhänger der neuen Gruppe bezeichnen. Schätzen Sie den Anteil der SAUFE-Anhänger unter allen Studenten mit einem Konfidenzniveau von $0,9$.

Aufgabe 4

Eine Stichprobe von 64 Knopfbatterien für elektrische Kugelschreiber liefert eine mittlere Lebensdauer von 75 Stunden und eine Standardabweichung von 8 Stunden. Wie groß ist die mittlere Lebensdauer aller Batterien in einer Lieferung von 1500 Stück mindestens? Konfidenzniveau $= 0,90$. Sie dürfen voraussetzen, dass die Lebensdauer normalverteilt ist mit $\sigma = 8$ Stunden.

Aufgabe 5

Das Durchschnittsalter von 10.000 Studenten soll aufgrund einer Stichprobe innerhalb eines Fehlerbereichs von 0,5 Jahren mit 95%-iger Sicherheit bestimmt werden. Aus der Vergangenheit ist bekannt, dass die Standardabweichung etwa 3 Jahre beträgt. Bestimmen Sie den notwendigen Stichprobenumfang.