

Aufgabensammlung - Lösungen

1 Grundlagen

1. a) $\frac{3}{8} = 0,375$; b) $\frac{7}{20} = 0,35$
- 3.1. a) $\frac{5}{8} = 0,625$; b) $\frac{5}{8} = 0,625$; c) $\frac{1}{2} = 0,5$; d) $\frac{3}{8} = 0,375$; e) $\frac{3}{4} = 0,75$; f) $\frac{1}{8} = 0,125$;
g) $\frac{1}{4} = 0,25$
- 3.2. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A \cap B = \{4\}$; $(A \cup C) \cap D = \{3, 4\}$;
 $(A \cap C) \cup D = \{2, 3, 4, 5\}$; $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $\overline{(A \cup C)} = \{5, 7, 9\}$;
 $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $\overline{(A \cup B)} \cap C = \emptyset$
4. a) $\frac{1}{12}$; b) $\Omega = \{1, 2, \dots, 12\}$; $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; $P(A) = \frac{|A|}{12}$; c) $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{12}$
5. Gegenbeispiel: z.B. $\Omega = \{0, 1\}$, $P(\{0\}) = \frac{1}{2}$, $A = B = \{0\}$.
6. a) $P(i) = \frac{i}{21}$, $i = 1, 2, \dots, 6$;
b) $P(A) = \frac{4}{7}$; $P(B) = \frac{10}{21}$; $P(C) = \frac{3}{7}$
c) $\frac{20}{21}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{10}{21}$
8. $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

2 Kombinatorik

1. a) 20; b) $25 \cdot 49 = 1225$
2. a) $\Omega = \{(W, W, W), (W, W, Z), (W, Z, W), (W, Z, Z), (Z, W, W), (Z, W, Z), (Z, Z, W), (Z, Z, Z)\}$
b) $\frac{1}{8}$; c) $\frac{3}{8}$
3. a) $8 \cdot 7 \cdot 6$; b) $\frac{11}{24}$
4. $2 \cdot (n - 1)!$
5. $\binom{14}{4}$; $\binom{9}{4}$
6. $\binom{12}{2} = 66$; $3^{10} = 59049$
7. a) $\binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} \cdot \binom{2}{2}$
b) (i) $\frac{1}{16}$; (ii) $\frac{7}{31}$; (iii) $\frac{3}{248}$
8. a) $\frac{1}{36}$; b) $\frac{5}{12}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $\frac{91}{216}$

9. $\frac{8}{21}$
10. a) 6; b) 6; c) 20; d) $\frac{9!}{4!}$
11. 60
12. a) 280; b) 1540
13. $\frac{2^{16} \cdot 16!}{32!}$
14. $\frac{1}{15}$
15. a) 14; b) $\frac{n(n-3)}{2}$
16. $\frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}; \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}; \frac{\binom{13}{5} \cdot 4}{\binom{52}{5}};$
17. a) $\frac{\binom{30}{2} \cdot \binom{50}{3}}{\binom{80}{5}}; \text{ b) } \frac{\binom{20}{1} \cdot ((\binom{30}{4}) + (\binom{30}{3}) \cdot \binom{30}{1})}{\binom{80}{5}}$
18. a) $\binom{54}{2}$; b) 6; c) (i) $\frac{\binom{24}{2}}{\binom{54}{2}}$; (ii) $\frac{12 \cdot 24}{\binom{54}{2}}$; (iii) $\frac{\binom{54}{2} - \binom{24}{2} - \binom{12}{2} - \binom{18}{2}}{\binom{54}{2}} = \frac{24 \cdot 12 + 24 \cdot 18 + 18 \cdot 12}{\binom{54}{2}}$
19. $\binom{102}{2}$

3 Mehrstufige Zufallsexperimente, Bedingte Wahrscheinlichkeit

1. $\frac{2}{5}$
2. $\frac{2}{5}$
3. ja: $\frac{2}{5}$ vs. $\frac{1}{5}$
4. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{2}{15}$
5. a) 0,026; b) $\frac{0,02}{0,026} \approx 0,77$
6. a) 0,002; b) 0,1017; c) 0,0187; d) 0,0378
7. b) A: $\frac{70}{100} \cdot \frac{50}{70} + \frac{30}{100} \cdot \frac{15}{30} = \frac{65}{100}$; B: $\frac{40}{100} \cdot \frac{30}{40} + \frac{60}{100} \cdot \frac{32}{60} = \frac{62}{100}$
8. $\frac{6}{7}$; $\frac{2}{5}$
9. 0,0334; 0,029; 0,175

4 Stochastische Unabhängigkeit

1. A und B
2. nein

5 Diskrete Zufallsvariablen: Erwartungswert, Varianz, Unabhängig-

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$; $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$; $V_X(0) = \frac{1}{8}$; $V_X(1) = \frac{3}{8}$; $V_X(2) = \frac{3}{8}$; $V_X(3) = \frac{1}{8}$;

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0; \\ \frac{1}{8} & \text{falls } 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2} & \text{falls } 1 \leq x < 2; \\ \frac{7}{8} & \text{falls } 2 \leq x < 3; \\ 1 & \text{falls } 3 \leq x \end{cases}$$

2. a) $E = 0,66 \text{ €}$; $Var = 206,0444$; b) 9428
3. $V(0) = \frac{3}{8}$; $V(1) = \frac{1}{3}$; $V(2) = \frac{1}{4}$; $V(3) = 0$; $V(4) = \frac{1}{24}$; $E(X) = 1$; $Var(X) = 1$
4. a) $E(X) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$; $Var(X) = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n^2}$;
b) Es wäre $1 = \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p = +\infty$, Widerspruch
5. $E(X) = \frac{32}{81}$; $Var(X) = \frac{34}{81} - \left(\frac{32}{81}\right)^2 = \frac{1730}{6561}$
6. a) $E(X) = \frac{29}{54} \text{ €} \approx 0,537 \text{ €}$; $\sigma \approx 3,57 \text{ €}$; b) beide verdoppeln sich
7. a) $V(2) = \frac{1}{10}$; $V(3) = \frac{1}{5}$; $V(4) = \frac{3}{10}$; $V(5) = \frac{2}{5}$; b) $E(X) = 4$; $Var(X) = 1$
8. a) $E(X) = \frac{n+1}{2}$; $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$; b) $E(X) = n$
9. a) $E(X) = 1,4$; $E(Y) = 2,4$; $Var(X) = 0,24$; $Var(Y) = 0,44$; abhängig
b) $E(X + Y) = 3,8$; $Var(X + Y) = 0,76$
c) $E(X \cdot Y) = 3,4$; $Var(X \cdot Y) = 2,44$
10. a) $E(X) = \frac{8}{3}$; $Var(X) = \frac{16}{9}$ b) $E(X) = \frac{8}{7}$; $Var(X) = \frac{48}{49}$
11. b) X und Y sind unabhängig
12. b) nein, X und Y sind abhängig

6 Binomialverteilung

1. a) $10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$; $\binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8$
b) $\sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$
c) 2,5
2. a) $0,485^6$; b) $6 \cdot 0,485^5 \cdot 0,515$;
c) $\binom{6}{3} \cdot 0,485^3 \cdot 0,515^3 + \binom{6}{4} \cdot 0,485^4 \cdot 0,515^2 + 6 \cdot 0,485^5 \cdot 0,515 + 0,485^6$

3. a) $\binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$; b) $n = 5$ und $n = 6$
6. a) 10; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$; c) $\binom{30}{13} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{17}$
7. a) $1 - 0,6^5$ b) 9
9. $p = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{60} - 60 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{59} - \binom{60}{2} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{58}$;
 gesuchte W'keit: $1 - (1-p)^{30} - 30 \cdot p \cdot (1-p)^{29} - \binom{30}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{28} - \binom{30}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{27}$

7 Geometrische Verteilung

1. ja
3. $p = \frac{1}{1+a}$; $E = a$; $Var = a(1+a)$
4. $G(2p - p^2)$

8 Negative Binomialverteilung

1. a) 5; b) $\frac{16}{125}$; c) $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6$; d) 2 e) 20
2. a) $\sum_{k=0}^4 \binom{32}{k} p^k (1-p)^{33-k} = \sum_{k=0}^4 \binom{28+k}{k} p^k (1-p)^{29}$
 b) $\binom{32}{4} p^5 (1-p)^{28}$
3. 1; -3; 6; -10; $\frac{1}{125}$

9 Hypergeometrische Verteilung

1. $\frac{\binom{30}{3} \cdot \binom{60}{3}}{\binom{90}{6}}$
2. a) $\sim 0,4$; b) $\sim 0,49$; c) 0,85
3. a) $\frac{91}{285}$; b) $\frac{91}{285}$; c) $\frac{116}{255}$

10 Poisson Verteilung

1. $1 - \frac{5}{e^2} \approx 0,32$
2. 106
3. a) $B(40000, \frac{1}{1000}) \sim P(40)$; b) $\sim 319220\text{€}$

11 Tschebyscheffsche Ungleichung

1. a) $1 - e^{-\frac{7}{18}}$; b) $P \leq 0,56$ vs. $P \approx 0,28$; c) $P \leq 0,08$ vs. $P \leq 0,076$
2. $P \leq 0,28$
3. 1000
4. a) 76; b) 8
5. a) $E = 4,5$; $Var = 8,25$;
b) $E = 4,5 \cdot n$ (45; 450); $Var = 8,25 \cdot n$ (82,5; 825);
c) $E = 4,5$; $Var = \frac{8,25}{n}$ (0,825; 0,0825);
d) für (3,6): $P \geq 0,63$; $P \geq 0,96$
e) 21

12 Stetige ZV, Exponentialverteilung

1. a) $\frac{1}{4}$;
b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{1}{4}(x^2 + x - 2), & \text{für } x \in (1, 2] \\ 1, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$E = \frac{37}{24}; \quad Var = \frac{59}{24} - \left(\frac{37}{24}\right)^2$$

c) 0; 0,4375; 1

d) $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$

2. a) $2a = b$, $b > 0$; b)

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{bx}, & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-bx}, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

c) 0

3. a) $a = b > 0$; b) $\sqrt{\frac{2 \cdot \ln(10)}{a}}$

4. $1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$; Annahme: W'keit, dass Lampe in einem Zeitintervall kaputt geht, ist proportional der Länge des Zeitintervalls (egal wie alt die Lampe ist)

- 5.

$$f_{X^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{für } x \in (0, \frac{1}{4}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

13 Normalverteilung

Ohne Lösungen, standard

14 Zentraler Grenzwertsatz

1. (316, 384)

2. $\sim 0,08$

15 Statistik

Ohne Lösungen, standard