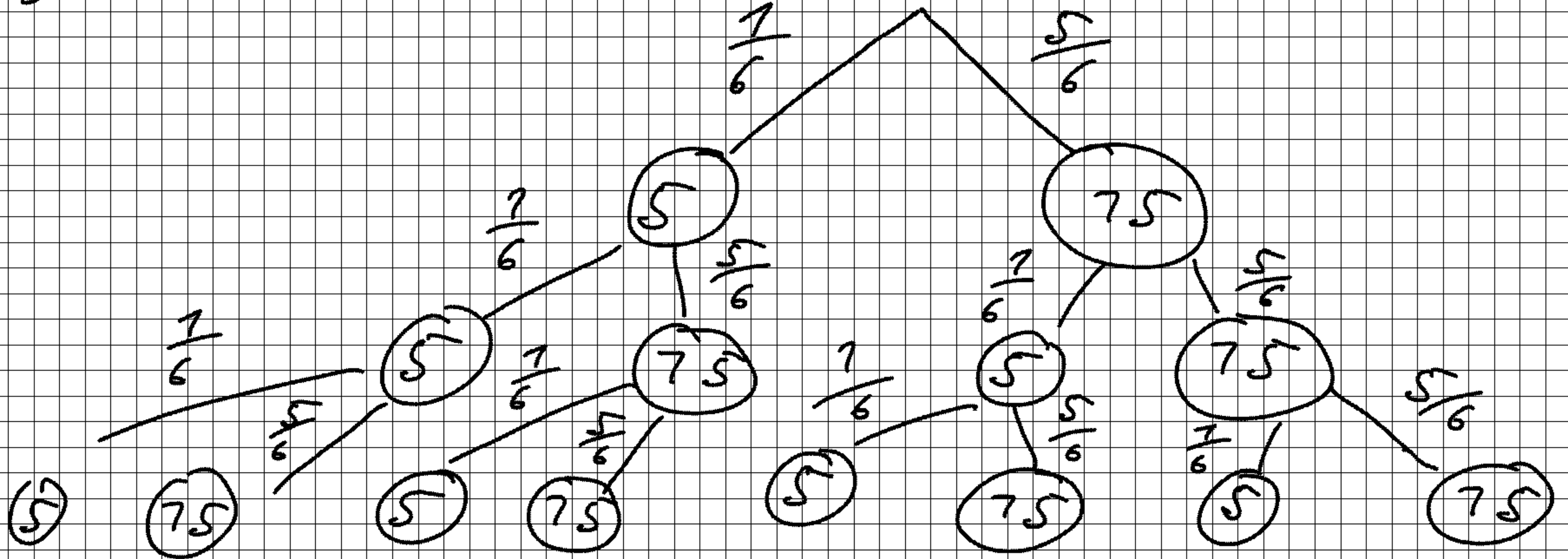
Bsp/ fairer 6-Würfel wird 3 mal geworfen

Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewürfelten 5 an

a) $X = \{0, 1, 2, 3\}$

b) Gib die Verteilung von X an.



k	$P(X=k)$
0	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.579$
1	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0.347$
2	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0.069$
3	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0.005$

Diagram

c) Wie sieht Verteilungsfunktion aus?

k	$P(X \leq k)$
0	0.579
1	0.926
2	0.995
3	1

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

Folie 3) a) Definition und Annahme, dass X diskret ist.

b) Da $x < y$ gilt, sind die Ereignisse mit $X \leq x$ eine Teilmenge der Ereignisse $X \leq y$. Da die Wahrscheinlichkeiten addiert werden und nichtnegativ sind gilt: $P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$

$2 < 3$

$(1, 5, 5)$ $(5, 5, 5)$

Folie 4)

a) $$F(b) - F(a) = \sum_{x_j \leq b} P(X = x_j) - \sum_{x_j \leq a} P(X = x_j)$$

$$= \sum_{a < x_j \leq b} P(X = x_j) \quad \Rightarrow \text{Intervall }]a, b]$$

b) mit 2.5 (c) und Intervall $]a, \infty]$

Folie 5

⇝ Python Beispiel Augensumme 2 faire normale 6-Würfel

$$E(X) = 7 = \mu_X$$

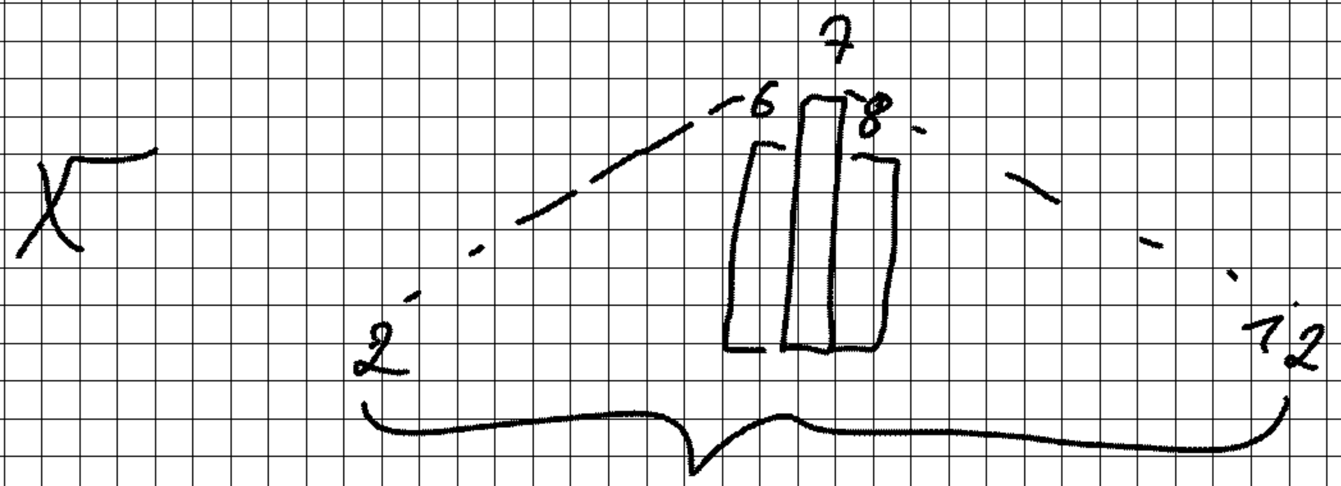
⇝ Zweiter Würfel:

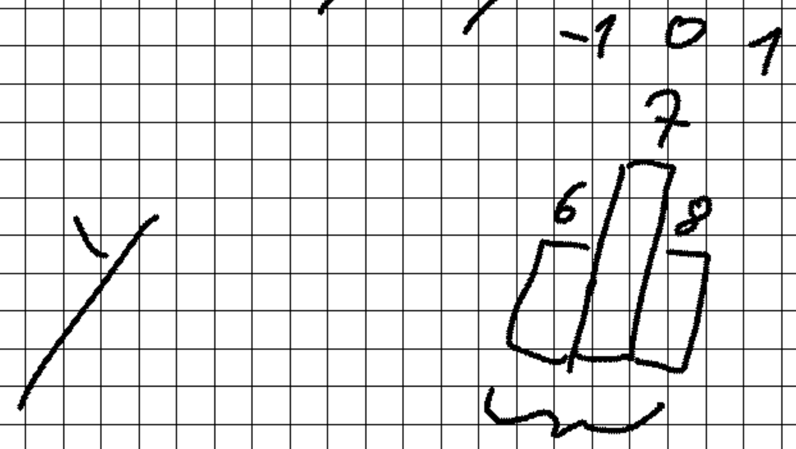
1-Wurf

Y: 8; 6 7 7 7; 7

6	7	8
$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(Y) = 6 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{4}{6} + 8 \cdot \frac{1}{6} = 7 = \mu_Y$$





$\Rightarrow$ brauchen weitere Kennzahl. Kennzahl gibt an, wie stark Zufallsvariable von EW abweichen kann

Idee 1: $E(\underbrace{X-\mu_X}_{\text{neue ZV}}) \Rightarrow E(Y-\mu_Y) = -1\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{4}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} = 0$

$\Rightarrow$ ↯ nicht gut wegen pos/neg

Idee 2: $E(|Y-\mu_Y|) \Rightarrow$ ↯ nicht gut ableitbar usw...

Idee 3: $E\left((Y-\mu_Y)^2\right) = Var(Y)$

Korrekte Einheit: Standardabweichung $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$

$Var(X) \approx 5.8$

$$Var(Y) \approx \frac{1}{3}$$

Folie 6)

$$E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \cdot P(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \left[X(\omega) \cdot P(\omega) + Y(\omega) \cdot P(\omega) \right]$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\omega)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

Bsp: 10 Kugeln, 6 rote, 4 schwarz, 4 gleichzeitig ziehen

X: Anzahl der roten Kugeln

Idee: $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

$\uparrow$ Kugel 1

X_i:	1	0
	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 0 \cdot \frac{4}{10}$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 \cdot \frac{3}{5} = 2.4$$

Folie 7) $E(X) = \sum_{k=0}^{5} k \cdot P(X=k)$

X gibt an, wie viele Personen die richtige Jacke bekommen

Folie 9) i) $Var(X) = E\left(\left(E(X) - X\right)^2\right)$

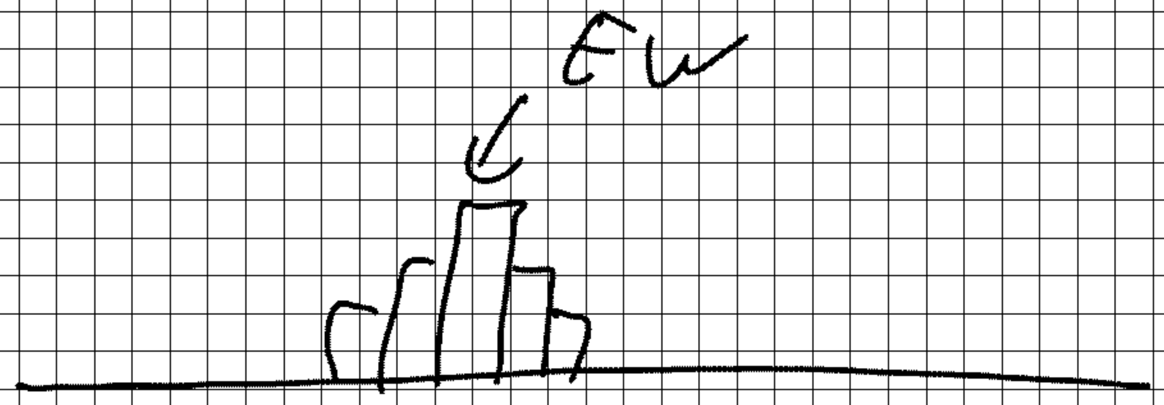
$$= E\left(E(X)^2 - 2\,E(X)X + X^2\right)$$

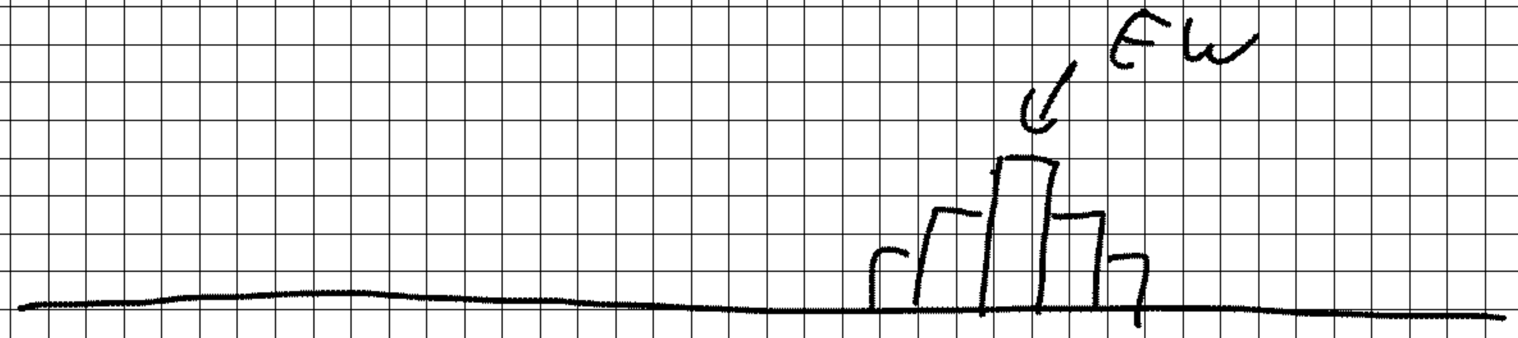
$$\overset{2.12(i)}{=} E\left(\mu_X^2\right) - E\left(2\mu_X X\right) + E\left(X^2\right)$$

$$= \mu_X^2 - 2\mu_X\, E(X) + E\left(X^2\right)$$

$$= E\left(X^2\right) - \mu_X^2$$

(ii) $Var(X+6) = Var(X)$





Warum gilt nicht $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$?

Bsp/ X: Augensumme bei 2 6-Würfeln

X_{min} : kleine Augenzahl

X_{max} : große Augenzahl

$X_{min}((2,5)) = 2$ $\quad$ $X_{max}((2,5)) = 5$ $\quad$ $X((2,5)) = 7$

$X_{min}((3,3)) = 3$ $\quad$ $X_{max}((3,3)) = 3$ $\quad$ $X((3,3)) = 6$