Wiederholung

$|M| = n$

Reihenfolge wichtig:

keine Doppelten: $Per^*(M) \subseteq M \times \ldots \times M$

oder Variation $V^*(n,k)$ mit $k=n \Rightarrow$ Permutation

$Per_k^*(M)$

oder Menge aller k-Tupel

Doppelte: $Per_k(M)$

oder $V(n,k)$

oder Menge aller k-Tupel mit Wiederholung

Reihenfolge unwichtig:

keine Doppelten: $Kom_k^*(n) = \{(a_1, \dots, a_k) \in \{1, \dots, n\}^k \mid a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$

oder

Teilmenge, Auswahl, Binomialkoeffizient

Doppelte: $Kom_k(n) = \{(a_1, \dots, a_k) \in \{1, \dots, n\}^k \mid a_1 \leq a_2 \dots \leq a_k\}$

oder

Multimengen, Auswahl mit Wiederholung, Kombination mit Zurücklegen

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$$

$$(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1)$$

Folie 1 4 Würfel, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$ $P(A) < P(A \mid B)$

A: Im letzten Wurf keine 6, $A=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega \mid x_4 \neq 6\}$

B: In den ersten drei Würfen nur 6, $B=\{(6, 6, 6, x_4) \in \Omega \}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6^3 \cdot 5}{6^4} =$$ [redacted]

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{|\Omega|} \cdot \frac{|\Omega|}{6} =$$ [redacted]

$$|A \cap B| = |\{(6, 6, 6, x_4) \in \Omega \mid x_4 \in \{1, \dots, 5\}\}| = 5$$

$$|B| = 6$$

Folie 4)

- Def Bed. Wahrscheinlichkeit $\quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

  Tree: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

- totale Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$
$$= P_B(A) \cdot P(B) + P_{\bar{B}}(A) \cdot P(\bar{B})$$

- Satz von Bayes

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

Folie 5, 6

Test für eine seltene Krankheit

Annahme:

1. Prävalenz : $P(\text{krank}) = 1\%$
2. Sensitivität: $P(\text{pos} \mid \text{krank}) = 95\%$
3. Spezifität: $P(\text{neg} \mid \text{nicht krank}) = 98\%$

97,74 %

99,99 %

645

Was ist $P(\text{krank} \mid \text{pos})$?

$$P(\text{krank} \mid \text{pos}) = \frac{P(\text{pos} \mid \text{krank}) \cdot P(\text{krank})}{P(\text{pos})} \overset{(*)}{=} \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.0279} = 33.3\%$$

(*) totale Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{pos}) = P(\text{pos} \mid \text{krank}) \cdot P(\text{krank}) + P(\text{pos} \mid \text{nicht krank}) \cdot P(\text{nicht krank})$$

$$= 0.99 \cdot 0.01 + (1 - 0.98) \cdot 0.99$$

$$= 0.0279$$

Folie 7) Bsp von Folie 1

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{6} \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3} \qquad P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6^3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{5}{6^4}$$

Bsp: 2 mal mit fairem 6-Würfel

A: 1. Wurf gerade

B: 2. Wurf gerade

C: Summe der Augenzahlen ist gerade

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Folie 8) Beweis 1.23 7

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(A)\big(\underset{P(\Omega)}{1} - P(B)\big) = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

Folie 11) Bsp: 2 mal fairer Würfel, Summe der Augenzahlen

Pythonsimulation

$$X = \{2, \ldots, 12\}$$

Folie 11) Ein fairer 6-Würfel wird 3 mal geworfen. Die Zufallsvariable

X gibt die Anzahl der gewürfelten fünfen an

5

a) Welche Werte kann X annehmen?

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

b) Gib die Verteilung von X an

c) Wie sieht die Verteilungsfunktion aus?