Folie 4) Sei $(\Omega, P) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein Laplaceraum.

Sei $|\Omega| < \infty$. Sei $A \subseteq \Omega$, $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ $|A| = n$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|A|$ ← Anzahl günstiger Fälle

$|\Omega|$ ← Gesamtanzahl

Frage: Wie wahrscheinlich ist es, als Summe der 2 Zahlen eine 5 zu würfeln?

1. Versuch: $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}$ $\Rightarrow$ no Laplaceraum

$$2 = 1 + 1$$
$$3 = 2 + 1 = 1 + 2$$

2. Versuch: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$= \{ (1,1), (1,2), \dots, (1,6), \quad |\Omega| = 36$$
$$(2,1), \dots$$
$$\vdots$$
$$\dots (6,6) \}$$

Ereignis $A = \{ (2,3), (4,1), (1,4), (3,2) \}$

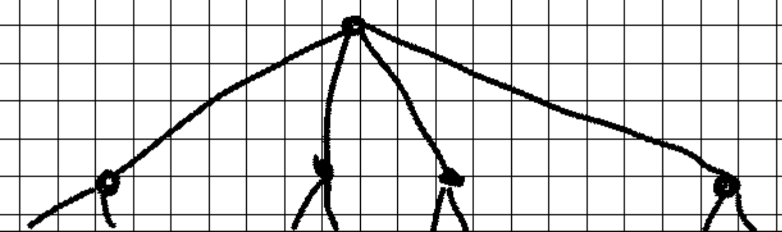
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Folie 5 $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{A, B, C, D\}$

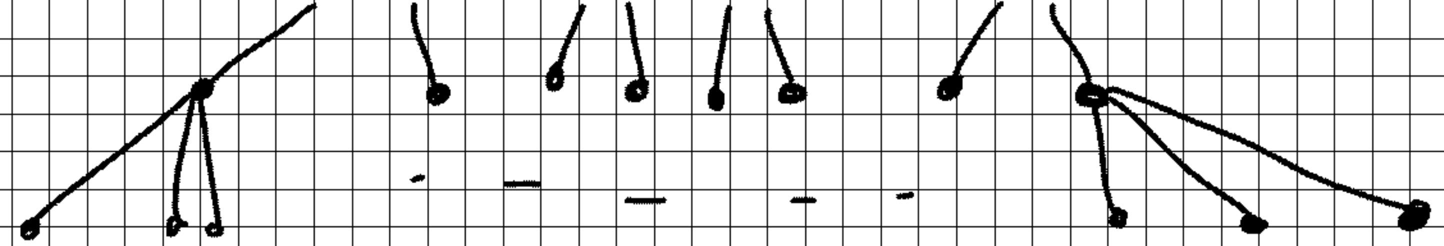
$$M_1 \times M_2 = \{ (1,A), (1,B), (1,C), (1,D)$$
$$\vdots$$
$$\dots (3,D) \}$$

$$\Rightarrow |M_1 \times M_2| = 3 \cdot 4 = 12$$

Folie 6



Beweis mit Induktion



Beispiel: 200 Plätze, 120 Studierende

Wie viele verschiedene Sitzverteilungen gibt es?

$$\left.\begin{array}{ll} 200 & \text{Mögl.} \\ 199 & \text{Mögl.} \\ \vdots & \\ 81 & \text{Mögl.} \end{array}\right\} \overset{KZ}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{l} 200 \cdot 199 \cdot \ldots \cdot 81 \ \text{Mögl.} \\ \dfrac{200!}{80!} \end{array}$$

Beispiel $|\mathcal{P}(A)|$ $\quad A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$$\left.\begin{array}{llll} a_1 & \text{in Teilmenge oder nicht} & \rightsquigarrow & 2 \ \text{Mögl} \\ \vdots & & & \\ a_n & \qquad '' & \rightsquigarrow & 2 \ \text{Mögl} \end{array}\right\} \overset{KZ}{\Longrightarrow} 2^n \ \text{Mögl.}$$

$(1, 0, 1)$

Folie 7 $M_1 = \{1, 2, 3\}$ $M_2 = \{A, B, C, D\}$

$(1, 3, 2) \in Per^*(M_1)$ $(1, 3) \notin Per^*(M_1)$

$(3, 2, 3) \notin Per^*(M_1)$ $(1, 3) \in Per_2^*(M_1)$

$(1, 2, 3) \in Per_3^*(M_1)$

Sei A eine Menge mit $|A| = n$. Wie groß ist $Per_k^*(A)$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!}$$

Slide 8 Wie viele Möglichkeiten gibt es aus einer Grundmenge mit n Elementen k auszuwählen? $\binom{n}{k}$

$X = \{1, 2, 3\}$

2-Teilmengen: $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}$ $\qquad \binom{3}{2} = 3$

Es gibt $k!$ Mögl. eine Menge mit k Elementen zu sortieren

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$(x+y)^n$$

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Bsp: 10 Freunde, 6 zur Party.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn 3 fest gewählte Freunde immer zur Party kommen?

$$\binom{10-3}{3} = \binom{7}{3} = \dots = 35$$

Folie 12 / Bsp:

$n = 3$ (Getränkesorten, Bier, Saft, Wasser)

$k = 4$ Flaschen kaufen

Mögl	Bier	Saft	Wasser
1	* * * *		
2	* * *	*	
⋮			
15			* * * *

$\underline{*} \quad \underline{*} \quad \underline{|} \quad \underline{|} \quad \underline{*} \quad \underline{*} \qquad 4 + 3 - 1 = 6$

Folie 14 | Beweisidee

- Sei S die Menge aller Multisets einer Menge $\{1, 2, \dots, n\}$
- Sei T die Menge aller k-Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n+k-1\}$

$\Rightarrow |T| = \binom{n+k-1}{k}$

- Bijektive Abbildung $f: S \to T$

$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in S \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$

$f(\{a_1, \dots, a_k\}) = \{a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \dots, a_k + (k-1)\}$